

Андрианов И. К., Олейников А. И.
I.K. Andrianov, A.I. Oleinikov

**ПОВЕРХНОСТЬ И ЗАКОН ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ
СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С РАЗНЫМИ СВОЙСТВАМИ
НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

**THE SURFACE AND THE FLOW RULE FOR THE RIGID-PLASTIC FRAME-TYPE
SYSTEMS WITH DIFFERENT PARAMETERS OF PULL AND COMPRESSION**



Олейников Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики и анализа конструкций и процессов Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: a.i.oleinikov@mail.ru, cvmi@knastu.ru.
Mr. Alexander I. Oleinikov – Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mechanics and Analysis of Structures and Processes, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur). E-mail: a.i.oleinikov@mail.ru, cvmi@knastu.ru.



Андрианов Иван Константинович – бакалавр по направлению «Прикладная механика» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – Bachelor of "Applied Mechanics" Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Аннотация. Получены кусочно-линейное и гладкое условия текучести, закон течения для стержневой системы из жестко-пластических материалов с различными пределами текучести на сжатие и растяжение. Предложена аппроксимация сингулярной поверхности текучести, проанализированы соотношения между скоростями пластических деформаций для этих поверхностей и выполнена оценка влияния различия пределов текучести.

Summary. Conditions for piecewise linear yield and smooth yield are considered, a flow rule for a frame structure made of rigid-plastic materials with various yield values for pull and stress is offered. Approximation of singular yield surface is proposed, and parities between speeds of plastic deformations for these surfaces are analyzed; assessment of the impact of differences between yield points is carried out.

Ключевые слова: пластичность, стержневая система, разносопротивляемость, закон течения, поверхность текучести.

Key words: plasticity, frame structure, multimodulus behavior, flow rule, yield surface.

УДК 539.376

Рассмотрим текучесть системы из трех жесткопластических стержней, нагруженной двумя силами Q_1 и Q_2 (см. рис. 1, 2). Вектор с компонентами q_i представляет собою вектор скорости точки A . Пластическое течение этой системы возникает в случаях, когда эта система становится механизмом. Для того чтобы система превратилась в механизм, необходимо, чтобы два стержня перешли в пластическое состояние. Третий стержень останется жестким и будет вращаться около точки закрепления.

Многие современные и природные материалы с разного рода микронарушениями сплошности и устойчивости обладают существенно разными свойствами на растяжение и сжатие [1], поэтому далее учитываем, что стержни обладают разными пределами текучести на растяжение и сжатие

$$\sigma_m = \begin{cases} \sigma_m, \dot{\epsilon} > 0 - \text{растяжение} \\ a\sigma_m, \dot{\epsilon} < 0 - \text{сжатие}, a > 0 \end{cases},$$

где положительное число a учитывает различия пределов текучести при растяжении и сжатии.

Аналогично задаче, рассмотренной Ю. М. Работновым [2] для обычного жестко-пластического материала, получим уравнения равновесия для разносопротивляющейся стержневой системы и закон текучести.

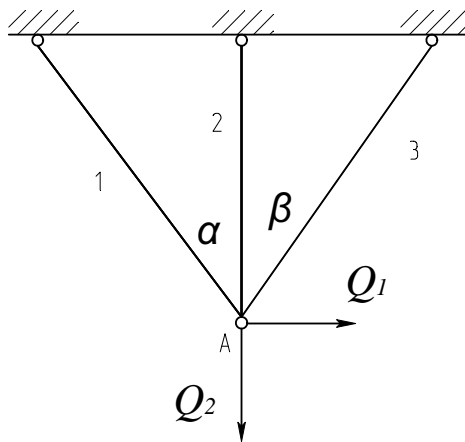


Рис. 1. Стержневая система

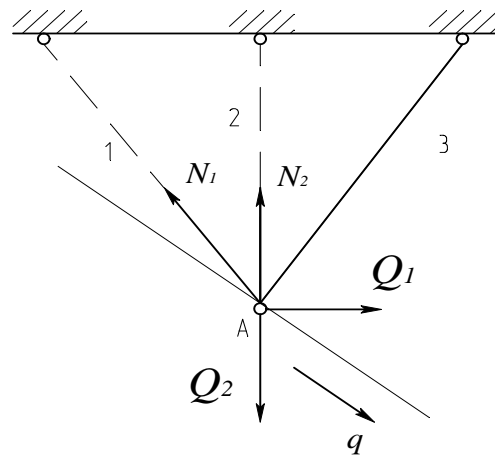


Рис. 2. Текучесть стержневой системы

Пусть стержни 1 и 2 находятся в состоянии текучести, а стержень 3 остается жестким. При вращении стержня 3 против часовой стрелки, стержни 1 и 2 будут оба растягиваться. Усилия в них одинаковы: $N_{m1} = N_{m2} = \sigma_m F$. Спроектируем все силы на направление, перпендикулярное к стержню 3, и получим уравнение равновесия для данной стержневой системы

$$f_1 = Q_1 \cos \beta + Q_2 \sin \beta - \sigma_m F (\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)) = 0. \quad (1)$$

Распределение скоростей при данном вращении определено с точностью до некоторого множителя $\lambda > 0$

$$\dot{q}_1 = \lambda \cos \beta, \quad \dot{q}_2 = \lambda \sin \beta. \quad (2)$$

Уравнение (1), по сути, является условием текучести, а соотношения (2) – ассоциированным законом течения. Действительно, применив ассоциированный закон к условию текучести f_1 , получим

$$\dot{q}_i = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial Q_i};$$

$$\dot{q}_1 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \lambda \cos \beta, \quad \dot{q}_2 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = \lambda \sin \beta.$$

Аналогично рассматривая другие возможные движения точки A данного механизма в соответствии с возможными попарными комбинациями перешедших в пластическое состояние стержней, получим шесть кусочно-линейных условий текучести

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = Q_1 \cos \beta + Q_2 \sin \beta - \sigma_m F (\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)); \\ f_2 = -Q_1 \cos \beta - Q_2 \sin \beta - a \sigma_m F (\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)); \\ f_3 = Q_1 - \sigma_m F (\sin \alpha + a \sin \beta); \\ f_4 = -Q_1 - \sigma_m F (a \sin \alpha + \sin \beta); \\ f_5 = Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha - a \sigma_m F (\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)); \\ f_6 = -Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha - \sigma_m F (\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)). \end{array} \right.$$

Кусочно-линейные условия текучести образуют в пространстве сил шестиугольник текучести (см. рис. 3).

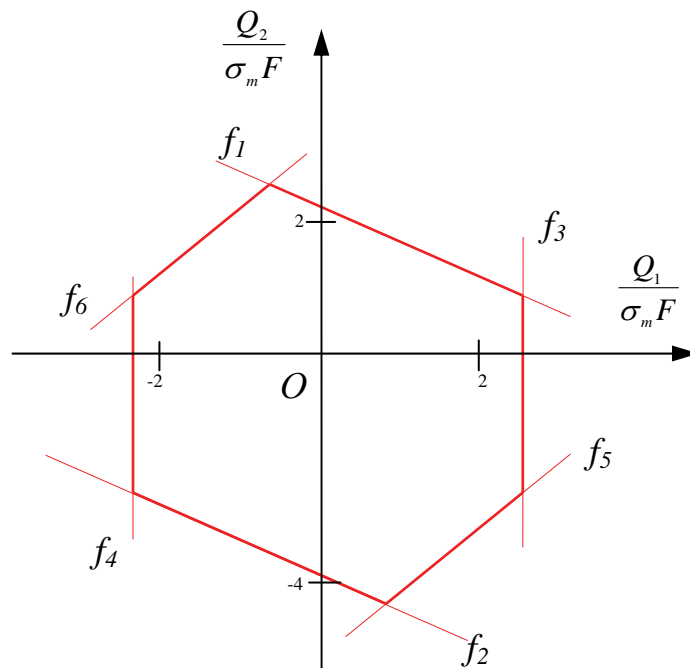


Рис. 3. Поверхность текучести для трехстержневой системы при $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 2$

В случае, когда $\alpha = \beta$, кусочно-линейные условия текучести могут быть аппроксимированы гладким условием, представляющим собой описанный эллипс вокруг поверхности текучести, уравнение которого можно записать в следующем виде:

$$\left[\frac{2Q_2 + \sigma_m F (2 \cos \alpha + 1)(a - 1)}{\sigma_m F (2 \cos \alpha + 1)(a + 1)} \right]^2 + \left[\frac{Q_1}{\sigma_m F \sin \alpha (a + 1)} \right]^2 \frac{4(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)}{(2 \cos \alpha + 1)^2} = 1.$$

Поверхность текучести состоит из гладких, в данном случае прямолинейных участков, но имеет угловые точки, в которых производная не существует. В точке A многоугольника текучести (см. рис. 4) нагрузка будет удовлетворять двум условиям текучести f_1 и f_3 , из которых следует, что все три стержня находятся в состоянии текучести, однако скорость точки A будет не вполне произвольной, она должна быть такой, чтобы стержни 1 и 2 растягивались, а стержень 3 сжимался.

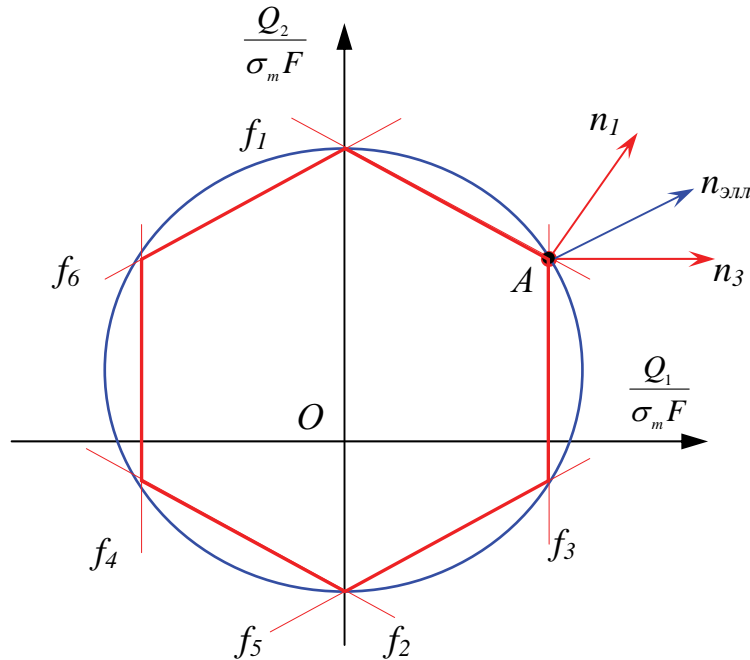


Рис. 4. Поверхность текучести и ее гладкая аппроксимация

В этом случае для определения зависимости между скоростью деформации и нагрузками будем использовать обобщенный ассоциированный закон течения

$$\dot{q}_i = \sum_{n=1}^N \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial Q_i};$$

$$\dot{q}_1 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = \lambda_1 \cos \beta + \lambda_3, \quad \dot{q}_2 = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = \lambda_1 \sin \beta.$$

Такое деформирование возможно только в том случае, если вектор скорости точки A лежит внутри угла, образованного нормальными n_2 и n_1 к поверхности.

Аналогичный результат можно получить, если использовать аппроксимацию кусочно-линейного условия текучести эллипсом при $\alpha = \beta$. Убедимся в этом: определим направление вектора скорости перемещений для угловой точки A с помощью уравнения аппроксимирующей кривой.

Уравнение нормали к эллипсу $n_{\text{элли}}$

$$\frac{Q_2}{\sigma_m F} = \cos \alpha (1 - a) + 1 - \frac{\sin^2 \alpha (1 + a)}{2(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)} + \frac{\sin \alpha}{2(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)} \left(\frac{Q_1}{\sigma_m F} \right).$$

Уравнение нормали n_1

$$\frac{Q_2}{\sigma_m F} = \cos \alpha (1 - a) + 1 - \frac{\sin^2 \alpha (1 + a)}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{Q_1}{\sigma_m F} \right).$$

Уравнение нормали n_3

$$\frac{Q_2}{\sigma_m F} = \cos \alpha (1 - a) + 1.$$

Для определения направления вектора скорости, который будет параллелен вектору нормали $n_{элл}$, рассмотрим множители, стоящие перед $Q_1 / \sigma_m F$, причем они не зависят от параметра разномодульности

$$k_{элл} = \frac{\sin \alpha}{2(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)}, k_1 = \operatorname{tg} \alpha, k_3 = 0.$$

Оценим данные коэффициенты, поскольку именно они определяют угол наклона вектора скорости. Как видно из графика (см. рис. 5), значение угла наклона $k_{элл}$ всегда будет лежать в области между крайними положениями k_1 и k_3 , таким образом, условие, которое требует, чтобы вектор скорости лежал внутри угла, образованного нормальными n_1 и n_3 , выполняется и результаты, полученные с помощью обобщенного ассоциированного закона и с помощью уравнения аппроксимирующей кривой, будут совпадать.

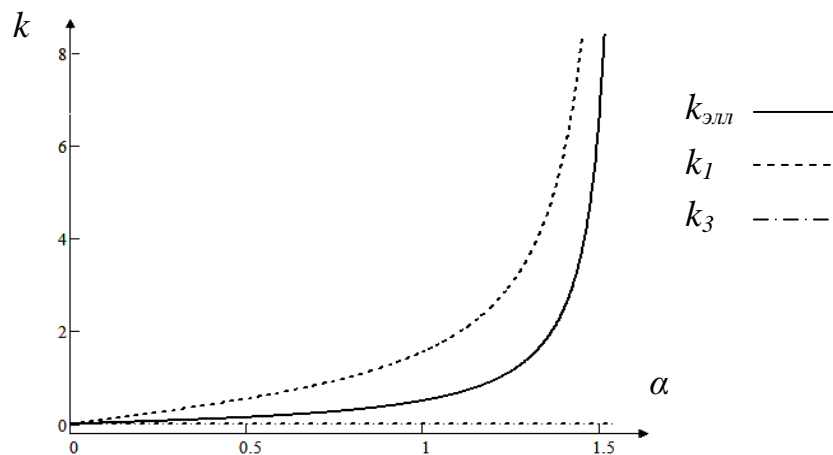


Рис. 5. Зависимость тангенса угла наклона k_i вектора скорости от угла α

На данном графике видно, что при стремлении $\alpha \rightarrow \pi/2$ кривая $k_{элл}$ будет приближаться к кривой k_1 , то есть $k_{элл} \rightarrow k_1$. При совпадении этих кривых в бесконечности вектор скорости перемещений будет параллелен вектору нормали n_1 и закон текучести будет определяться согласно условию текучести f_1 .

Оценим влияние величины a на поверхность текучести. Для обычного материала, когда $a = 1$, кривая текучести должна быть симметричной относительно каждой из осей, так как при изменении знака напряжений на обратный также имеет место состояние текучести (см. рис. 6) и материал будет обладать одинаковыми пределами текучести на растяжение и на сжатие.

Ассиметричность возникает, когда коэффициент $a \neq 1$. В том случае, если $a > 1$, поверхность текучести будет увеличиваться в размерах вдоль оси $Q_2 / \sigma_m F$, тогда как будет увеличиваться и жесткая область. Такие поверхности будут определять поведение стержневых систем, предел текучести которых на сжатие больше, чем на растяжение. При $a \rightarrow \infty$ стержни практически не оказывают сопротивления растяжению, например в случае жестко-сыпучего материала.

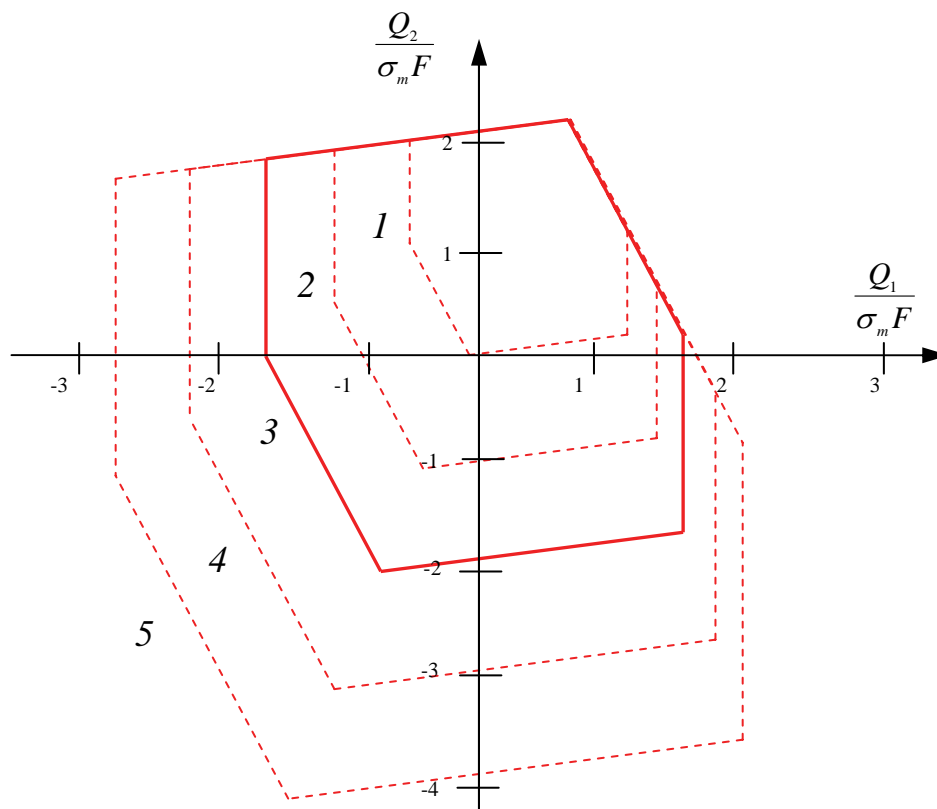


Рис. 6. Поверхности текучести для стержневой системы ($\alpha = 70^\circ$, $\beta = 40^\circ$) при различных коэффициентах разномодульности:

- 1 – кривая текучести при $a = 0$; 2 – кривая текучести при $a = 0,5$;
 3 – кривая текучести при $a = 1$; 4 – кривая текучести при $a = 1,5$;
 5 – кривая текучести при $a = 2$

При $a < 1$ поверхности текучести будут уменьшаться вдоль оси $Q_2/\sigma_m F$, они будут характерны для стержневых систем, материал которых лучше сопротивляется растяжению, нежели сжатию. При $a = 0$ поверхность текучести будет соответствовать, например, системе стержней из нитевидных и волокнистых материалов, которые не сопротивляются сжатию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников, В. П. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред / В. П. Мясников, А. И. Олейников. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 172 с.
2. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 713 с.