

**Стельмашук С. В.**  
**S. V. Stelmashchuk**

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПО ПРЯМЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ КАЧЕСТВА  
НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ**

**ON ANALYTICAL SYNTHESIS USING DIRECT QUALITY FACTORS BASED  
ON A SIMPLIFIED MODEL**



**Стельмашук Сергей Валерьевич** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27. E-mail: rukdpsv@rambler.ru

**Mr. Sergei V. Stelmashchuk** – PhD in Engineering, Assistant Professor, Department of Electro Drive Engineering and Industrial Automation, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Komsomolsk-on-Amur, 27, Lenin avenue. E-mail: rukdpsv@rambler.ru

**Аннотация.** Рассмотрен параметрический синтез ПИ-регулятора по прямым показателям качества, основанный на методике оценки качества системы автоматического регулирования, где скорректированная система заменяется упрощённой моделью – инерционным звеном второго порядка. Приведён пример синтеза.

**Summary.** The paper considers parametrical synthesis of the PI-controller using direct factors of quality, based on the method for estimation of quality of an automatic control system where the corrected system is replaced with a simplified model – an inertial link of the second. The synthesis example is provided.

**Ключевые слова:** система регулирования, показатели качества, инерционное звено второго порядка, переходный процесс, синтез.

**Key words:** control system, quality factors, inertial link of the second order, transient process, synthesis.

УДК 62.83

**Введение**

Методы синтеза регулятора системы автоматического регулирования (САР), такие как метод ЛАХ, методы настройки на различные стандартные формы [3] и т.д., требуют полного математического описания объекта регулирования. В данной статье рассмотрен подход к синтезу параметров регулятора, основанный на соответствующих классических методах синтеза, но используя частичные сведения о математическом описании объекта регулирования. Такой подход может применяться к объектам с нелинейным математическим описанием или к физическим объектам, используя экспериментальные данные.

Целью работы является применение сугубо аналитического подхода к решению задачи синтеза, без использования каких-либо графических зависимостей. Это позволит решать задачу синтеза на этапе эксплуатации САР. Условием задачи являются ограниченные сведения о математическом описании объекта, которые можно получить экспериментальным способом. В данной статье, для примера, рассматривается параметрический синтез пропорционально-интегрирующего регулятора (ПИ-регулятора).

Основным критерием синтеза является равенство частоты среза и запаса устойчивости по фазе скорректированной САР и упрощённой модели САР, параметры которого соответствуют требуемым прямым показателям качества (ППК).

**Постановка задачи**

Задана передаточная функция объекта регулирования  $W_o(p)$ , представляющая собой инерционное звено высокого порядка. Необходимо определить параметры ПИ-регулятора по требуемым ППК: перерегулированию  $\sigma^{mp}$  и времени переходного процесса  $t_{mn}^{mp}$ .

Колебательное звено является упрощённой моделью скорректированной САР в замкнутом состоянии и играет роль эталонной или желаемой характеристики, как желаемая ЛАХ в методе ЛАХ или корни, соответствующие стандартной форме. В данной работе для синтеза учитываются только две качественные характеристики: требуемые значения частоты среза  $\omega_{cp}^{mp}$  и запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^{mp}$ , соответствующие упрощённой модели.

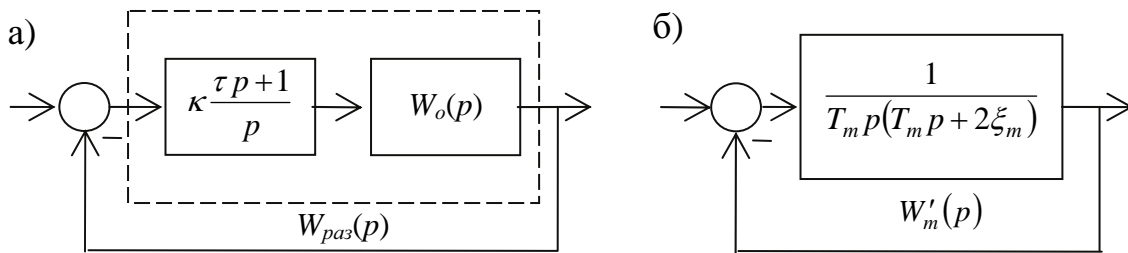


Рис. 1. САР (а) ставится в соответствии с колебательным звеном (б) в разомкнутом состоянии

Эти характеристики определяются для разомкнутой САР. Поэтому сравниваются разомкнутая передаточная функция корректируемой САР  $W_{раз}(p)$  и передаточная функция упрощённой модели в разомкнутом состоянии  $W'_m(p)$  (см. рис. 1). Поскольку ПИ-регулятор приводит САР к астатизму 1-го порядка, то колебательное звено в разомкнутом состоянии также должно быть астатическим.

**Определение характеристик качества**

Определение качественных характеристик определяется в два этапа, которые в принципе можно объединить в один этап.

Формулы аналитической связи между ППК и параметрами колебательного звена представлены в [2]. Задаваясь требуемыми значениями ППК  $\sigma^{mp}$  и  $t_{mn}^{mp}$ , можно определить необходимые значения параметров колебательного звена  $T_m$  и  $\xi_m$ .

Определение требуемых значений частоты среза  $\omega_{cp}^{mp}$  и запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^{mp}$  по параметрам упрощенной модели  $T_m$  и  $\xi_m$  осуществляется исходя из формул для вычисления параметров упрощённой модели для астатической САР [1]:

$$\varphi_{cp}^{mp} = -\arccos\left(2\xi_m^2 - \sqrt{1 + 4\xi_m^2}\right), \tag{1}$$

$$-\pi \leq \varphi_{cp}^{mp} \leq -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi^{mp} = \varphi_{cp}^{mp} + \pi;$$

$$\omega_{cp}^{mp} = \frac{1}{T_m} \sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_m^2} - 2\xi_m^2}, \tag{2}$$

где  $\varphi_{cp}^{mp}$  – значение фазовой частотной характеристики (ФЧХ) САР при  $\omega_{cp}^{mp}$ .

## Определение параметров ПИ-регулятора

Параметры ПИ-регулятора рассчитываются исходя из равенства ЛАЧХ и ФЧХ, разомкнутых скорректированной САР и упрощённой модели при частоте среза  $\omega_{cp}^{mp}$ :

$$\begin{aligned} L_o(\omega_{cp}^{mp}) + L_p(\omega_{cp}^{mp}) &= 0; \\ \varphi_o(\omega_{cp}^{mp}) + \varphi_p(\omega_{cp}^{mp}) &= \varphi_{cp}^{mp}. \end{aligned}$$

где  $L_o(\omega) = 20 \lg(|W_o(\omega)|)$  – ЛАЧХ объекта регулирования;

$\varphi_o(\omega) = \arg(W_o(\omega))$  – ФЧХ объекта регулирования;

$L_p(\omega) = 20 \lg \left| \kappa \frac{\tau j\omega + 1}{j\omega} \right|$  – ЛАЧХ ПИ-регулятора;

$\varphi_p(\omega) = \arg \left( \kappa \frac{\tau j\omega + 1}{j\omega} \right)$  – ФЧХ ПИ-регулятора.

Решая данную систему уравнений, получим формулы для вычисления параметров ПИ-регулятора:

$$\kappa = \frac{\omega_{cp}^{mp}}{|W_o(j\omega_{cp}^{mp})| \sqrt{1 + ctg^2(\varphi_{cp}^{mp} - \varphi_o(\omega_{cp}^{mp}))}}; \quad (3)$$

$$\tau = - \frac{ctg(\varphi_{cp}^{mp} - \varphi_o(\omega_{cp}^{mp}))}{\omega_{cp}^{mp}}. \quad (4)$$

В расчётах удобнее вместо значения запаса устойчивости по фазе  $\Delta\varphi^{mp}$  использовать связанное с ней значение ФЧХ  $\varphi_{cp}^{mp}$ .

Поскольку  $\varphi_p(\omega)$  изменяется в диапазоне  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ , то на значение  $\omega_{cp}^{mp}$  накладывается ограничение исходя из неравенства:

$$\varphi_{cp}^{mp} < \varphi_o(\omega_{cp}^{mp}) < \varphi_{cp}^{mp} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_o^{-1}\left(\varphi_{cp}^{mp} + \frac{\pi}{2}\right) < \omega_{cp}^{mp} < \varphi_o^{-1}(\varphi_{cp}^{mp}).$$

Ограничение на частоту среза определяет ограничение на требуемое время переходного процесса:

$$t_{nn.min}^{mp} < t_{nn}^{mp} < t_{nn.max}^{mp},$$

где

$$t_{nn.min}^{mp} = \lambda(\xi_m) \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_m^4} - 2\xi_m^2}}{\omega_{cp.max}^{mp}} - \quad (5)$$

минимальное допустимое  $t_{nn}^{mp}$ ;

$$t_{nn.max}^{mp} = \lambda(\xi_m) \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_m^4} - 2\xi_m^2}}{\omega_{cp.min}^{mp}} - \quad (6)$$

максимальное допустимое  $t_{nn}^{mp}$ ;

Стельмашук С. В.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ПО ПРЯМЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ КАЧЕСТВА

НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

$\lambda(\xi_m)$  – коэффициент, связывающий время переходного процесса и постоянную времени упрощённой модели [2];

$\omega_{cp.min}^{mp}$ ,  $\omega_{cp.max}^{mp}$  – граничные значения частоты среза, определяемые решением уравнений

$$\varphi_{cp}^{mp} + \frac{\pi}{2} = \varphi_o(\omega_{cp.min}^{mp}), \quad \varphi_{cp}^{mp} = \varphi_o(\omega_{cp.max}^{mp}). \quad (7)$$

Данный способ настройки ПИ-регулятора даёт приблизительный результат. Расхождения в значениях ППК САР от требуемых ППК зависят от свойств объекта управления и могут достигать значительной погрешности при изменении требуемых значений ППК. Причинами большой погрешности является дискретное изменение времени переходного процесса в зависимости от колебательного характера переходных процессов [1] и несоблюдение требований по запретной области запаса устойчивости [3].

### Пример аналитического синтеза ПИ-регулятора

Для минимизации погрешности можно задавать требуемое значение по времени переходного процесса на среднем участке интервала  $(t_{nn.min}^{mp}, t_{nn.max}^{mp})$ . Задан объект регулирования

$$W_o(p) = \frac{1}{(0.05p + 1)(0.04p^2 + 0.3p + 1)}.$$

Таковыми передаточными функциями, как правило, моделируются электроприводы постоянного тока.

Аналитический синтез ПИ-регулятора осуществляется по следующему алгоритму:

1. Задаётся требуемое перерегулирование  $\sigma^{mp} = 0,15$ , т.е. 15 %.

2. Расчёт коэффициента демпфирования упрощённой модели [2]:

$$\xi_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\ln(\sigma^{mp})}\right)^2}} = 0,517.$$

3. Расчёт требуемого значения фазы при частоте среза по формуле (1):  $\varphi_{cp}^{mp} = -2,214$ .

4. Определение граничных значений частоты среза с помощью решения уравнений (7):  $\omega_{cp.min}^{mp} = 1,79 c^{-1}$ ,  $\omega_{cp.max}^{mp} = 6,45 c^{-1}$ .

5. Расчёт допустимых значений времени переходного процесса по формулам (5) и (6):  $t_{nn.min}^{mp} = 0,63 c$ ,  $t_{nn.max}^{mp} = 2,28 c$ ,

где необходимо рассчитать коэффициент  $\lambda(\xi_m)$  [2]:  $n = \text{floor}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi_m^2}}{\pi \xi_m} \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right) = 1$ .

Здесь  $\Delta = 0,05$  – относительная величина зоны установившегося процесса. Тогда

$$\lambda(\xi_m) = \frac{\arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi_m^2}}{\xi_m}\right) + n\pi}{\sqrt{1 - \xi_m^2}} + 2\xi_m - \Delta e^{\frac{\xi_m}{\sqrt{1 - \xi_m^2}} \left(\arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi_m^2}}{\xi_m}\right) + n\pi\right)} = 5,28.$$

6. Задаётся требуемое время переходного процесса  $t_{nn}^{mp} = 1,5c$ .

7. Расчёт постоянной времени упрощённой модели [2]:  $T_m = \frac{t_{nn}^{mp}}{\lambda(\xi_m)} = 0,284c$ .

8. Расчёт требуемого значения частоты среза по формуле (2):  $\omega_{cp}^{mp} = 2,73c^{-1}$ .

9. Расчёт параметров ПИ-регулятора по формулам (3) и (4):  $\kappa = 2,78$ ,  $\tau = 0,136c$ .

На рис. 2 представлены кривые переходных процессов упрощённой модели  $h_m(t)$  и скорректированной САР  $h(t)$ . ППК скорректированной САР составили  $t_{nn} = 1,34c$  и  $\sigma = 0,163$ , что составило 11,9 % и 7,8 % погрешности соответственно.

Если поменять требования, например  $t_{nn}^{mp} = 1c$  и  $\sigma^{mp} = 0,2$ , то расхождения по результатам синтеза гораздо значительней  $t_{nn} = 1,44c$  и  $\sigma = 0,18$ , что составляет погрешность 30,6 % и 10,2 % соответственно.

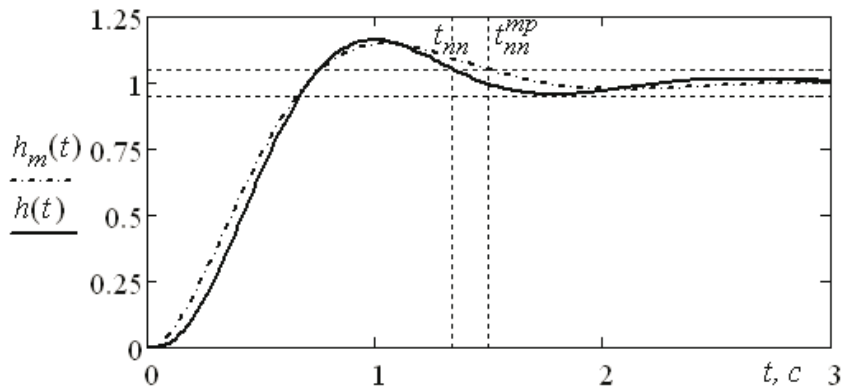


Рис. 2. Переходные процессы упрощённой модели  $h_m(t)$ , соответствующей требуемым ППК, и скорректированной САР  $h(t)$

На рис. 3 видно дискретное изменение времени переходного процесса (последнее вхождение в зону установившегося процесса не на втором, а третьем полупериоде переходного процесса), а на рис. 4 видно нарушение запретной области запаса устойчивости АФХ разомкнутой скорректированной системы.

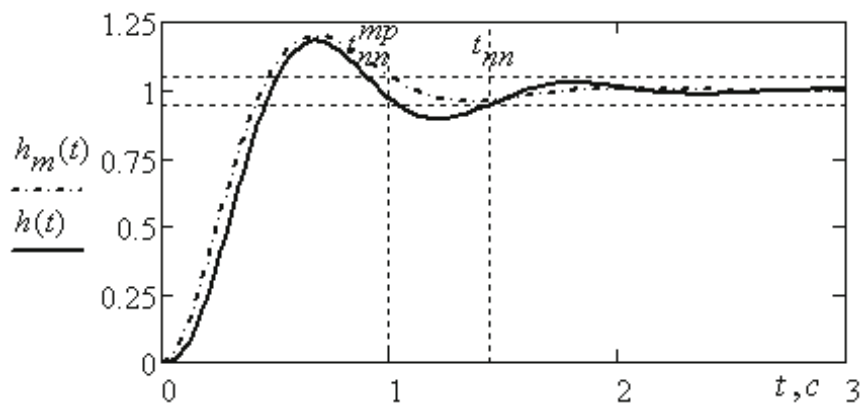


Рис. 3.  $h_m(t)$  и  $h(t)$  при изменённых значениях  $t_{nn}^{mp}$  и  $\sigma^{mp}$

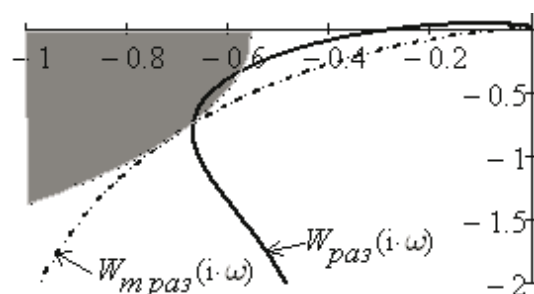


Рис. 4. АФХ упрощённой модели  $W_{m.paz}(j\omega)$  и скорректированной САР  $W_{paz}(j\omega)$  в разомкнутом состоянии

### Выводы

Несмотря на аналитический подход к рассмотренной методике синтеза, что делает процесс настройки ПИ-регулятора более лёгким (настройка «за одно действие» [2]), необходимо отметить следующие недостатки:

1. Низкая точность результатов аналитического синтеза параметров ПИ-регулятора обуславливается тем, что требования по  $t_{m}^{mp}$  берутся крайние на интервале  $(t_{m.min}^{mp}, t_{m.max}^{mp})$ .

Значения интервала вычисляются по  $\sigma^{mp}$ .

2. Для осуществления синтеза необходима дополнительная информация об объекте регулирования:  $\omega_{cp.min}^{mp} = \Phi_o^{-1}\left(\Phi_{cp}^{mp} + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\omega_{cp.max}^{mp} = \Phi_o^{-1}\left(\Phi_{cp}^{mp}\right)$ ,  $|W_o(j\omega_{cp}^{mp})|$  и  $\Phi_o(\omega_{cp}^{mp})$ .

Для того чтобы данная методика синтеза применялась для настройки ПИ-регулятора в процессе эксплуатации САР, вся информация, приведённая в недостатках, должна извлекаться из кривой разгона объекта регулирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Стельмашук, С. В. Оценка качества системы автоматического регулирования на основе упрощённой модели / С. В. Стельмашук // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2010. – № I-1(1). – С. 36-39.
2. Стельмашук, С. В. Расчёт прямых показателей качества колебательного звена на основе метода Ньютона / С. В. Стельмашук // Электротехнические комплексы и системы: материалы международной научно-технической конференции. В 5 т. Т. 3. – Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2010. – С. 107-111.
3. Бессекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бессекерский, Е. П. Попов. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. – 752 с.