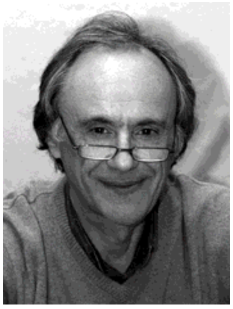
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
MATHEMATICS AND MECHANICS

Лейзерович Г. С., Симонов В. С.
G. S. Leyzerovich, V. S. Simonov

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОРМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С РАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ

ON INTERACTION OF VIBRATION MODES OF THIN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH DIFFERENT PARAMETRES OF WAVE FORMATION



Лейзерович Григорий Самуилович – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Механика и анализ конструкций и процессов» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: ktpm@knastu.ru
Mr. Grigoriy S. Leyzerovich — PhD in Engineering, Assistant Professor, Professor of the Department of Mechanics and Analysis of Processes and Structures, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: ktpm@knastu.ru.

Симонов Валерий Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика и анализ конструкций и процессов» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре).
Mr. Valeriy S. Simonov — PhD in Engineering, Assistant Professor, Department of Mechanics and Analysis of Processes and Structures, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur).

Аннотация. Рассмотрены малые изгибные колебания тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье. Считается, что оболочка имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы. Анализ основан на уравнениях движения теории пологих оболочек. Установлено, что начальные неправильности могут привести к интенсивному взаимодействию изгибных форм с разным, но близким, числом окружных волн.

Summary. The paper considers small flexural vibrations of a thin-walled circular cylindrical shell with Navier boundary conditions. It is believed that the shell has initial deviations from the ideal circular shape. The analysis is based on the equations of motion within the theory of shallow shells. It has been established that initial imperfections may lead to an intensive interaction of flexural modes with different, but close, numbers of circumferential waves.

Ключевые слова: круговая цилиндрическая оболочка, начальные неправильности, взаимодействие изгибных форм.

Key words: circular cylindrical shell, initial imperfections, interaction of flexural modes.

УДК 539.3:534.1

Введение. Теоретически установлено [4], что изгибные колебания оболочки с большими амплитудами при определенных условиях представляют собой режим бегущей волны. Этот режим характеризуется взаимодействием сопряженных изгибных форм (форм с одинаковыми волновыми параметрами, сдвинутых в окружном направлении на угол $\pi/2$).

Материал поступил 06.06.2011

Однако на практике и в экспериментах, даже при относительно небольших уровнях периодического возбуждения, отмечается и взаимосвязанность изгибных форм с разным, но близким, числом окружных волн n. Принято считать, что механизмом, запускающим такое взаимодействие, является геометрическая нелинейность оболочки [1; 3].

Ниже будет показано, что взаимодействие упомянутых изгибных форм может быть обнаружена даже в линейной постановке. И обусловлена она наличием у оболочки неизбежных начальных неправильностей w_0.

Математическая модель. Пусть оболочка радиусом *R*, длиной *l* и толщиной *h* совершает малые свободные изгибные колебания. Анализ основывается на уравнениях движения теории пологих оболочек [2]:

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -L(w_0, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{D}{h}\nabla^4 w = L(w_0, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где ∇^4 и L – известные дифференциальные операторы; w – прогиб; Φ – функция напряжений; $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ – цилиндрическая жесткость; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; ρ – массовая плотность; t – время.

Считается, что оболочка имеет начальные неправильности

$$w_0(y) = f_0 \cos\beta_0 y; \;\; \beta_0 = n_0/R,$$

где f_0 – амплитуда; n_0 – число волн.

Прогиб оболочки с краевыми условиями Навье аппроксимируется выражением, предполагающим связанность изгибных форм с разным числом окружных волн $n_1 \neq n_2$:

$$w(x,y,t) = \left[f_1(t)\cos\beta_1 y + f_2(t)\cos\beta_2 y\right]\sin\alpha x; \; \beta_1 = n_1/R; \; \beta_2 = n_2/R; \;\; \alpha = \pi/l.$$

Собственные частоты идеальной оболочки. Квадрат n-й безразмерной собственной частоты определяется по формуле [2]

$$\omega_n^2 = \frac{\varepsilon_n\left(1+\theta_n^2\right)^2}{12\left(1-\mu^2\right)} + \frac{\theta_n^4}{\left(1+\theta_n^2\right)^2},$$

где $\varepsilon_n = \left(n^2 h/R\right)^2$; $\theta_n = \pi R/nl$.

Рассмотрим, например, оболочку с параметрами $l/R = 0{,}6$; $R/h = 200$. Зависимость квадрата частоты такой оболочки от числа окружных волн n представлена на рис. 1.

Видно, что основной частоте соответствует $n = 10$. При этом $\omega_9^2 \approx \omega_{10}^2 \approx \omega_{11}^2$.

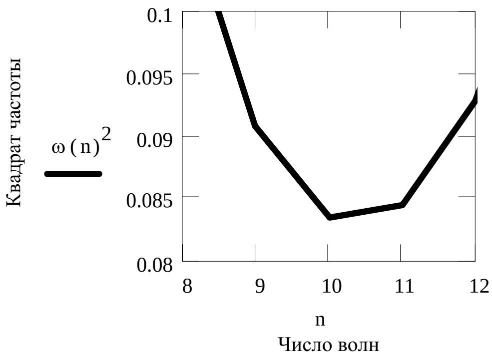


Рис. 1. Зависимость квадрата безразмерной собственной частоты от числа волн n

Частоты и формы собственных колебаний несовершенной оболочки. Покажем, что w_0 могут привести к заметному взаимодействию форм, например, с числом волн $n_1 = 9$ и $n_2 = 11$. Решение (1) по схеме П.Ф. Папковича приводит к связанным уравнениям:

$$\left(\rho R^2/E\right)\ddot{a}_1 + c_{11}a_1 + c_{12}a_2 = 0;\quad \left(\rho R^2/E\right)\ddot{a}_2 + c_{21}a_1 + c_{22}a_2 = 0\,, \tag{2}$$

в которых

$$c_{11} = \omega_9^2 + \frac{\varepsilon\theta^4}{4}\left\{\frac{1}{\left[\theta^2 + \left(1 + n_9/n_0\right)^2\right]} + \frac{1}{\left[\theta^2 + \left(1 - n_9/n_0\right)^2\right]}\right\}a_0^2;$$

$$c_{22} = \omega_{11}^2 + \frac{\varepsilon\theta^4}{4}\left\{\frac{1}{\left[\theta^2 + \left(1 + n_{11}/n_0\right)^2\right]} + \frac{1}{\left[\theta^2 + \left(1 - n_{11}/n_0\right)^2\right]}\right\}a_0^2;$$

$$c_{12} = \frac{\varepsilon\theta^4}{4\left[\theta^2 + \left(1 - n_9/n_0\right)^2\right]}a_0^2;\quad c_{21} = \frac{\varepsilon\theta^4}{4\left[\theta^2 + \left(1 - n_{11}/n_0\right)^2\right]}a_0^2;$$

$$\varepsilon = \left(n_0^2 h/R\right)^2;\quad \theta = \pi R/n_0 l;\quad a_0 = f_0/h;\ a_1 = f_1/h;\ a_2 = f_2/h.$$

Анализ выражений для коэффициентов упругой связи $c_{12} = c_{21}$ свидетельствует о том, что механизмом, запускающим взаимодействие изгибных форм с разным, но близким, числом окружных волн, являются начальные отклонения от идеальной круговой формы.

Из частотного уравнения

$$\left(c_{11} - \omega_{0n}^2\right)\left(c_{22} - \omega_{0n}^2\right) - c_{12}^2 = 0\,,$$

соответствующего системе (2), находим квадраты безразмерных собственных частот несовершенной оболочки ω_{0n}^2:

$$\omega_{011}^2 = \frac{1}{2}\left[c_{11} + c_{22} - \sqrt{\left(c_{11} - c_{11}\right)^2 + 4c_{12}^2}\right];\quad \omega_{09}^2 = \frac{1}{2}\left[c_{11} + c_{22} + \sqrt{\left(c_{11} - c_{11}\right)^2 + 4c_{12}^2}\right].$$

Отношение амплитуд колебаний определяется по формуле

$$\kappa_{0n} = \frac{a_1}{a_2} = -\frac{c_{12}}{c_{11} - \omega_{0n}^2} = -\frac{c_{22} - \omega_{0n}^2}{c_{21}}\,. \tag{3}$$

Расчеты и выводы. Зависимость (3) для оболочки с рассматриваемыми выше параметрами, имеющей несовершенства с числом окружных волн $n_0 = 10$, представлена на рис. 2.

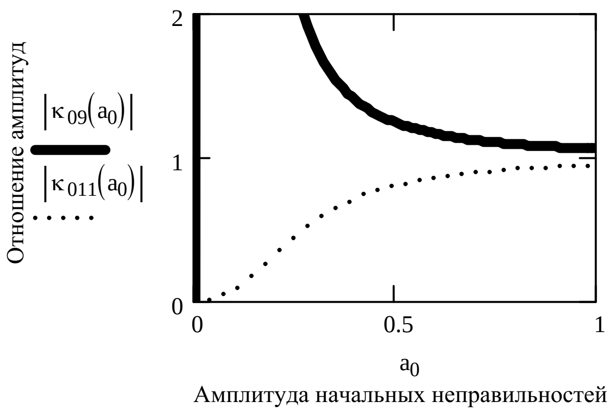


Рис. 2. Отношение амплитуд изгибных форм
с разным числом окружных волн *n*

Из графика видно, что с ростом амплитуды начальных неправильностей связанность изгибных форм с числом волн $n = 9$ и $n = 11$ заметно усиливается. При $f_0 \geq h$ ($a_0 \geq 1$) амплитуды этих форм по модулю примерно равны между собой как при колебаниях оболочки с частотой $\omega_0 = \omega_{09}$, так и при колебаниях с частотой $\omega_0 = \omega_{011}$.

Это означает, что генерирование одной из собственных изгибных форм оболочки может привести к нежелательным, с точки зрения ее динамической прочности, интенсивным колебаниям по другой изгибной форме с близким числом окружных волн. И механизмом, запускающим такое взаимодействие изгибных форм, являются начальные неправильности, неизбежные у реальной тонкостенной круговой цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аврамов, К. В. Многомодовые модели свободных нелинейных колебаний шарнирно-опертых цилиндрических оболочек / К. В. Аврамов, Р. Е. Кочуров // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного тіла. – 2009. – № 10. – С. 3-9.
2. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Кубенко, В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. – Киев: Наук. думка, 1984. – 220 с.
4. Эвенсен, Д. А. Нелинейные колебания круговых цилиндрических оболочек / Д. А. Эвенсен // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С. 156-176.