

О.Ю. Еренков, А.Г. Ивахненко

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ТОЧЕНИИ**

О.Ю. Еренков, А.Г. Ивахненко

05.02.07

O.Yu.Erenkov, A.G.Ivakhnenko

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ТОЧЕНИИ**  
**A MATHEMATICAL MODEL OF NON-LINEAR OSCILLATIONS AND DETERMINATION OF CONDITIONS FOR NONSTABILITY OF A PROCESS SYSTEM WHILE DRILLING**



**Еренков Олег Юрьевич** — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой Химической переработки природных ресурсов Тихоокеанского государственного университета. E-mail: [erenkov@list.ru](mailto:erenkov@list.ru)

**Oleg Yu. Erenkov** — PhD in Engineering, Associate Professor, Head of Department of Chemical Processing of Natural Resources, the Pacific State University, e-mail: [erenkov@list.ru](mailto:erenkov@list.ru)



**Ивахненко Александр Геннадьевич** — доктор технических наук, заведующий кафедрой «Управление качеством» Курского государственного технического университета. E-mail: [ivakhnenko2002@mail.ru](mailto:ivakhnenko2002@mail.ru)

**Alexander G. Ivakhnenko** — Doctor in Engineering, Head of Department of Quality Management at the City of Kursk State Technical University, e-mail: [ivakhnenko2002@mail.ru](mailto:ivakhnenko2002@mail.ru)

**Аннотация:** Рассмотрено применение гипотезы неустойчивости нелинейных динамических систем при точении полимерных материалов. Представлена математическая нелинейная модель колебаний. Проведена экспериментальная проверка гипотезы неустойчивости. Установлено, что неустойчивость при обработке характеризует прерывание процесса стружкообразования.

**Summary:** The paper discusses the application of the hypothesis of non-linear dynamic systems instability to the process of polymeric materials turning. A mathematical non-linear model of oscillations is presented. An experimental validity check of the non-stability hypothesis was performed. It was proved that instability during turning of polymeric materials leads to breaks in the chip formation process.

**Ключевые слова:** динамическая система, нелинейная модель колебаний, жесткость, демпфирование колебаний, режимы резания, стружкообразование, зоны стабильности.

**Keywords:** dynamic system, mathematical non-linear model, stiffness, damping of oscillations, cut parameters, chip formation, stability zones.

В работе [2] предложена гипотеза неустойчивости динамических систем, в которой рассмотрены условия ее возникновения, и показано, что неустойчивость может возникать только в нелинейных си-

стемах, и данное свойство отличается от устойчивости. Неустойчивость проявляется как разрыв связей между ускорениями, скоростями и перемещениями для процесса, достаточно близкого к заданному процессу, и возникающему при вариации сил, нелинейно зависящих от переменных состояния исходного процесса. Изучение неустойчивости в [2] проводилось на примере механизма с двумя степенями свободы и произвольно выбранной силой нелинейного сопротивления, поэтому выводы по этой работе содержат вопрос, а что, собственно, означает это явление, названное неустойчивостью.

В данной работе рассмотрено применение гипотезы неустойчивости при исследовании процесса точения полимерных материалов. За основу принята неоднократно апробированная модель колебаний технологической системы при точении [1, 3]. На рис. 1 представлена принятая расчетная схема технологической системы. На заготовку действуют составляющие силы резания  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ , а на инструмент те же составляющие силы резания, но взятые с обратным знаком, т. е. —  $P_x$ ,  $-P_y$ ,  $-P_z$ . Коэффициенты жесткости для заготовки и инструмента обозначены: по оси X —  $j_1$  и  $c_1$ , Y —  $j^2$  и  $c^2$ , Z —  $j^3$  и  $c^3$ . Коэффициенты демпфирования для детали и инструмента: по оси X —  $H_1$  и  $h_1$ , Y —  $H_2$  и  $h^2$ , Z —  $H_3$  и  $h^3$ . Инерционные коэффициенты для детали и инструмента: по оси X —  $M_1$  и  $m_1$ , Y —  $M_2$  и  $m^2$ , Z —  $M_3$  и  $m^3$ ; т. е. принято, что инерционные коэффициенты одинаковы для изгибных колебаний (для детали — по осям Y и Z, а для инструмента — по осям X и Z), и отличаются от инерционных коэффициентов

Поступила в редакцию 25.12.2009.

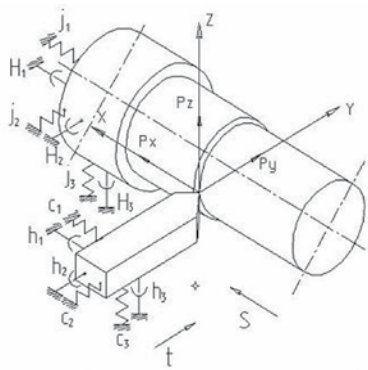


Рис. 1 – Расчетная схема технологической системы при точении

для продольных колебаний (для детали — по оси X, а для инструмента — по оси Y).

С учетом предложенной расчетной схемы и принятых обозначений математическая модель колебаний технологической системы может быть представлена в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_* + H_1 \dot{x}_* + j_1 x_* = P_x \\ m_1 \ddot{x}_* + h_1 \dot{x}_* + c_1 x_* = -P_x \\ M_2 \ddot{y}_* + H_2 \dot{y}_* + j_2 y_* = P_y + F_y^d \\ m_2 \ddot{y}_* + h_2 \dot{y}_* + c_2 y_* = -P_y \\ M_3 \ddot{z}_* + H_3 \dot{z}_* + j_3 z_* = P_z + F_z^d \\ m_3 \ddot{z}_* + h_3 \dot{z}_* + c_3 z_* = -P_z \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_d, y_d, z_d$  и  $x_u, y_u, z_u$  — составляющие вектора вибро смещений по осям X, Y и Z заготовки и инструмента соответственно;  $F_y^d$  и  $F_z^d$  — составляющие силы, вызванные наличием статического дисбаланса вращающейся заготовки. Для учета параметров динами-

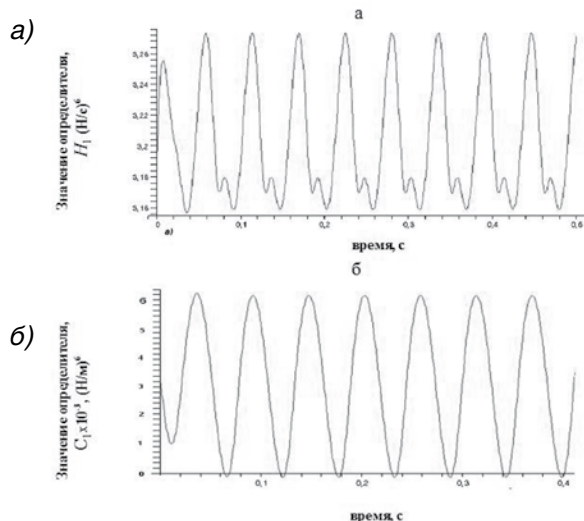


Рис.3-Значения определителей при обработке капролона: а) определитель  $H_1$ ; б) определитель  $C_1$

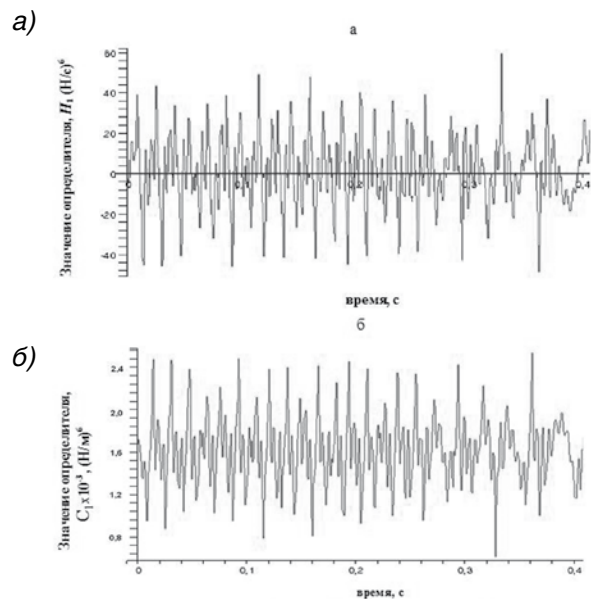


Рис.2. Значения определителей при обработке стали 40X: а)  $H_1$  б)  $C_1$

ческого состояния технологической системы, вместо номинально заданных значений подачи  $s_0$ , скорости  $v_0$  и глубины резания  $t_0$  рассматриваются их мгновенные значения —  $s$ ,  $v$  и  $t$ :

$$s = s_0 - \dot{x}_d + \dot{x}_u \quad t = t_0 - y_d + y_u \quad v = v_0 - \dot{z}_d + \dot{z}_u \quad (2)$$

В отличие от предшествующих работ, разложения выражения для составляющих силы резания в кратный ряд Тейлора по переменным, входящим в (2) до кубических членов. С учетом такого разложения система уравнений (1) представляет собой нелинейную модель колебаний технологической системы.

В соответствии с гипотезой неустойчивости динамических систем, если, наряду с основным процессом

с векторами перемещений  $X = \{x_d, x_u, y_d, y_u, z_d, z_u\}^T$ ,

скоростей  $\dot{X} = \{\dot{x}_d, \dot{x}_u, \dot{y}_d, \dot{y}_u, \dot{z}_d, \dot{z}_u\}^T$  и ускорений

$\ddot{X} = \{\ddot{x}_d, \ddot{x}_u, \ddot{y}_d, \ddot{y}_u, \ddot{z}_d, \ddot{z}_u\}^T$ , существует другой процесс, близкий к нему, с векторами перемещений

$X + \Delta X = \{x_d + \Delta x_d, x_u + \Delta x_u, y_d + \Delta y_d, y_u + \Delta y_u, z_d + \Delta z_d, z_u + \Delta z_u\}^T$ ,

скоростей

$\dot{X} + \Delta \dot{X} = \{\dot{x}_d + \Delta \dot{x}_d, \dot{x}_u + \Delta \dot{x}_u, \dot{y}_d + \Delta \dot{y}_d, \dot{y}_u + \Delta \dot{y}_u, \dot{z}_d + \Delta \dot{z}_d, \dot{z}_u + \Delta \dot{z}_u\}^T$

и ускорений

$\ddot{X} + \Delta \ddot{X} = \{\ddot{x}_d + \Delta \ddot{x}_d, \ddot{x}_u + \Delta \ddot{x}_u, \ddot{y}_d + \Delta \ddot{y}_d, \ddot{y}_u + \Delta \ddot{y}_u, \ddot{z}_d + \Delta \ddot{z}_d, \ddot{z}_u + \Delta \ddot{z}_u\}^T$ ,

мало отличающимися от основного процесса, то линеаризованные уравнения относительно вариаций перемещений, скоростей и ускорений можно представить в матричном виде:

$$M \Delta \ddot{X} + H_1 \Delta \dot{X} + C_1 \Delta X = 0 \quad (3)$$

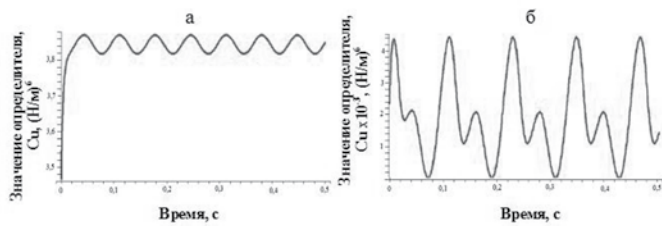


Рис.4- Влияние дисбаланса заготовки из капрлона на стабильность динамической системы при точении: а)  $e = 0,12 \cdot 10^{-3}$  мм; б)  $e = 0,32 \cdot 10^{-3}$  мм

где

$$\Delta X = \{\Delta x_\delta, \Delta x_u, \Delta y_\delta, \Delta y_u, \Delta z_\delta, \Delta z_u\}^T,$$

$$\Delta \dot{X} = \{\Delta \dot{x}_\delta, \Delta \dot{x}_u, \Delta \dot{y}_\delta, \Delta \dot{y}_u, \Delta \dot{z}_\delta, \Delta \dot{z}_u\}^T,$$

$\Delta \ddot{X} = \{\Delta \ddot{x}_\delta, \Delta \ddot{x}_u, \Delta \ddot{y}_\delta, \Delta \ddot{y}_u, \Delta \ddot{z}_\delta, \Delta \ddot{z}_u\}^T$  — вектора вариаций перемещений, скоростей и ускорений, соответственно; М, Н1, С1 — матрицы масс, демпфирования и жёсткости соответственно.

Матрица масс и структура матриц демпфирования и жёсткости имеют вид:

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 & h_{15} & h_{16} \\ 0 & h_{22} & 0 & 0 & h_{25} & h_{26} \\ 0 & 0 & h_{33} & 0 & h_{35} & h_{36} \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & h_{45} & h_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55} & h_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{65} & h_{66} \end{bmatrix}$$

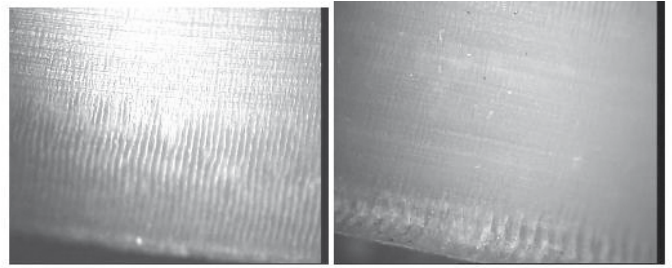


Рис. 5- Стружка капрлона, полученная при значениях дисбаланса заготовки: а)  $e = 0,12 \cdot 10^{-3}$  мм; б)  $e = 0,32 \cdot 10^{-3}$  мм

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & 0 & C_{65} \end{bmatrix} \quad (4)$$

В таблице 1 представлены некоторые элементы матриц Н1 и С1.

**Таблица 1**  
Элементы матриц демпфирования Н1 и жёсткости С1

Элемент матрицы	Выражения для определения элемента
$h_{11}$	$H_1$
$h_{15}$	$10C_{p1}k_{p1}\{n\dot{x} \cdot s_0^{xx}t_0^{xx}v_0^{m-1} - \frac{1}{2}s_0^{m-1}t_0^{xx}v_0^{m-1} \cdot \dot{x}x \cdot n\dot{x}(x_\delta - x_u) - \frac{1}{2}s_0^{xx}t_0^{xx}v_0^{m-2} \cdot n\dot{x}(n\dot{x} - 1)(\dot{z}_\delta - \dot{z}_u) - \frac{1}{2}s_0^{xx}t_0^{xx-1}v_0^{m-1} \cdot y\dot{x} \cdot n\dot{x}(y_\delta - y_u)\}$
$h_{16}$	$-h_{15}$
$h_{22}$	$h_1$
$h_{25}$	$-h_{15}$
$h_{26}$	$h_{15}$
$c_{11}$	$j_1 - 10C_{p1}k_{p1}\{s_0^{xx-1}t_0^{xx-1}v_0^{m-1} \cdot \dot{x}x + \frac{1}{2}s_0^{xx-2}t_0^{xx}v_0^{m-1} \cdot \dot{x}x(\dot{x}x - 1)(x_\delta - x_u) + \frac{1}{2}s_0^{xx-1}t_0^{xx-1}v_0^{m-1} \cdot \dot{x}x \cdot n\dot{x}(\dot{z}_\delta - \dot{z}_u) + \frac{1}{2}s_0^{xx-1}t_0^{xx-1}v_0^{m-1} \cdot \dot{x}x \cdot y\dot{x}(y_\delta - y_u)\}$

$C_{12}$	$j_1 - C_{11}$
$C_{13}$	$10C_{p, k_{\mu}} \{ s_0^{xx} t_0^{yy-1} v_0^{zz} \cdot yx -$ $-\frac{1}{2} s_0^{xx-1} t_0^{yy-1} v_0^{zz} \cdot xx \cdot yx (x_0 - x_0) -$ $-\frac{1}{2} s_0^{xx} t_0^{yy-1} v_0^{zz-1} \cdot yx \cdot xx (z_0 - z_0) -$ $-\frac{1}{2} s_0^{xx} t_0^{yy-2} v_0^{zz} \cdot yx \cdot (yx-1)(y_0 - y_0) \}$
$C_{14}$	$-C_{13}$
$C_{21}$	$C_{12}$
$C_{22}$	$C_1 - C_{12}$
$C_{23}$	$-C_{13}$
$C_{24}$	$C_{13}$

Тогда для рассматриваемой динамической системы условия неустойчивости имеют следующий вид:

$$\det H_1 = 0, \quad (5)$$

$$\det C_1 = 0. \quad (6)$$

Алгоритм определения неустойчивости включает следующую последовательность действий:

1. Составление нелинейной модели колебаний (1);
2. Вариация перемещений, скоростей и ускорений;
3. Линеаризация уравнений колебаний относительно вариаций (3);
4. Формирование определителей матриц  $H_1$  и  $C_1$  для расчета точек неустойчивости (4);
5. Задание параметров модели и режимов обработки;
6. Решение нелинейной модели колебаний;
7. Вычисление определителей матриц  $H_1$  и  $C_1$ ;
8. Проверка выполнения условий неустойчивости (5) и (6).

Представляет значительный интерес рассмотрение механизма возникновения неустойчивости при обработке металлов и полимеров. Такое сравнение было выполнено для различных конструкционных металлических и полимерных материалов.

На рис. 2 представлены значения определителей, соответствующих условиям (5) и (6) при обработке стали 40X при следующих значениях технологических режимов:  $t = 2$  мм;  $s = 1$  мм/об;  $v = 40$  м/мин.

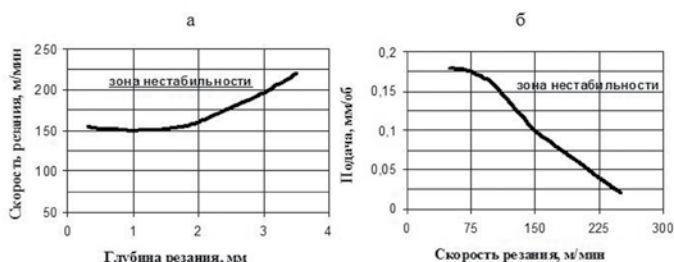


Рис. 6 - Зона неустойчивости при обработке капролона: а - подача 0,1 мм/об; б - глубина резания 1,0 мм

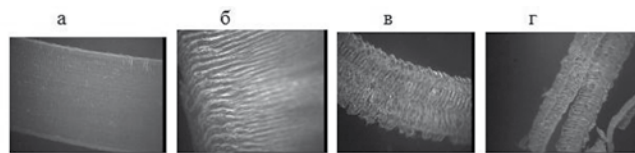


Рис. 7- Фотографии стружек капролона:  
а - скорость резания 100 м/мин; б - скорость резания 150 м/мин;  
в - скорость резания 180 м/мин; г - скорость резания 240 м/мин

Из рис. 2 видно, что процесс обработки при данных режимах является неустойчивым, поскольку выполняется условие (5). Данные значения режимов обработки были выбраны на основе результатов экспериментальных исследований [4], согласно которым при них имеет место высокий уровень колебаний  $\approx 0,1$  мм и интенсивное наростообразование с частотой срыва наростов  $\approx 900$  Гц.

На рис. 3 представлены значения определителей, соответствующих условиям (5) и (6) при обработке капролона при следующих значениях технологических режимов:  $t_0 = 2$  мм;  $s_0 = 0,1$  мм/об;  $v_0 = 170$  м/мин.

Сравнительный анализ условий возникновения неустойчивости при обработке резанием металлических и полимерных материалов позволил сделать следующий вывод: возникновение неустойчивости при обработке металлических материалов связан с выполнением условия (5), а при обработке полимерных материалов — с условием (6).

На наш взгляд, это связано с высокой жесткостью и невысоким демпфированием колебаний у металлических материалов и, наоборот, с низкой жесткостью и высоким демпфированием колебаний у полимерных материалов.

Согласно основным положениям гипотезы стабильности динамических систем, переход системы из стабильного состояния в неустойчивое состояние может быть вызван только внешними воздействиями. В модели нелинейных колебаний технологической системы таким источником является дисбаланс заготовки.

На рис. 4 показано влияние дисбаланса заготовки из капролона на стабильность динамической системы при точении. На рис. 5 показаны фотографии стружек, полученные при обработке капролона на соответствующих режимах обработки, выбранных при моделировании (рис. 4). Различные значения дисбаланса заготовки обеспечивались при её предварительной обработке посредством пробных проходов.

Таким образом, теоретические и экспериментальные исследования подтверждают положение гипотезы стабильности динамических систем, согласно которому, переход системы из стабильного состояния в неустойчивое состояние связан с внешними воздействиями, каковым в данном случае является сила от дисбаланса вращающейся заготовки.

Из представленных результатов видно принципиальное отличие таких свойств динамических систем, как устойчивость и стабильность. Неустойчивость динамических систем проявляется при любой величине внешнего воздействия, отличной от нуля. Неустойчивость динамических систем имеет потенциальный

характер, т. е. возникновение интенсивных колебаний в нестабильной системе, изменяющих характер процесса обработки, возможно только при превышении определенного порога величины внешнего воздействия. При малой величине внешнего воздействия нестабильность динамической системы может не проявиться.

Исследование моделей колебаний (1) и (3) показало, что нестабильность технологической системы связана с такими колебаниями заготовки и инструмента, при которых составляющие силы резания принимают нулевые или отрицательные значения, т. е. происходит прекращение собственно самого процесса резания.

В данной работе посредством моделирования определены зоны стабильного и нестабильного состояния динамической системы при точении полимерных материалов, а также проведены экспериментальные исследования процесса стружкообразования при обработке в зонах стабильного и нестабильного состояний. На рис. 6 представлены границы зоны стабильности, полученные при моделировании процесса точения заготовок из капролона.

Экспериментальная проверка возможности появления нестабильности при обработке капролона выполнялась при различных технологических режимах. Фотографии полученных стружек представлены на рис. 7. Анализ полученных данных показал соответствие характера процесса стружкообразования зонам стабильности и нестабильности технологической системы. Так, фотография стружки, представленная на рис. 7, а, соответствует процессу обработки в зоне стабильности, а фотография стружки, представленная на рис. 7, б, процессу обработки в области перехода от зоны стабильности к зоне нестабильности. Фотографии стружек, представленные на рис. 7, в, г, соответствуют процессу обработки капролона в зоне нестабильности технологической системы.

На основании выполненных теоретических и экспериментальных исследований предлагается следующее объяснение механизма возникновения нестабильности динамической системы при точении. Нелинейный характер рассмотренной модели колебаний динамической системы обусловлен степенной зависимостью силы резания от смещений и скоростей заготовки и режущей кромки инструмента. Вариация связей обусловлена изменением коэффициентов  $C_r$ ,  $C_k$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в выражении для силы резания (2), причинами чего могут быть неоднородность обрабатываемого материала заготовки и износ режущего инструмента. Изменение коэффициентов в выражении для силы резания (2) приводит к изменению параметров технологической системы, что отражается в изменении параметров модели колебаний (1). Данные изменения параметров могут привести к переходу технологической системы в потенциально нестабильное состояние. При наличии внешнего воздействия (силы от дисбаланса вращающейся заготовки), величина которого превышает некоторый пороговый уровень, в технологической системе будут развиваться интенсивные колебания, приводящие к выполнению (в т. ч.

одновременному) следующих условий:  $v = 0$ ;  $s = 0$ ;  $t = 0$ . Их выполнение вызовет прекращение процесса стружкообразования и, как следствие, ухудшение параметров качества обработанной поверхности.

Таким образом, разработана нелинейная модель колебаний технологической системы при точении, а также создан и реализован алгоритм определения нестабильности динамической системы при точении. Установлено, что внешним воздействием, приводящим к переходу технологической системы в нестабильное состояние, является сила от дисбаланса обрабатываемой заготовки. Экспериментально установлено наличие взаимосвязи между параметрами колебаний технологической системы при обработке и шероховатостью обработанной поверхности детали, что подтверждает правомерность результатов теоретического исследования о наличии зон нестабильности технологической системы СПИЗ при токарной обработке полимерных материалов.

#### **Выводы по работе:**

1. Разработана нелинейная модель колебаний технологической системы при точении полимерных материалов.
2. Путем сравнительного анализа условий установлено, что возникновение нестабильности при обработке металлических материалов связано с высокой жесткостью и незначительным демпфированием колебаний у металлических материалов и, наоборот, с пониженной жесткостью и высоким демпфированием колебаний у полимерных материалов.
3. Посредством моделирования определены зоны стабильного и нестабильного состояний динамической системы при точении полимерных материалов.
4. По результатам экспериментальных исследований процесса точения капролона установлено, что нестабильность при обработке характеризуется прерыванием процесса стружкообразования.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Ивахненко Е. О. Обеспечение точности обработки на токарных станках посредством выбора рациональных режимов резания с учетом состояния динамической системы СПИД. Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре: 1997. — 19 с.
2. Кирсанов М. Н. Определение и анализ стабильности движения с использованием Maple/Exponenta Pro. Математика в приложениях. №3-4 (7-8). 2004. С. 134-137.
3. Комялова Е. В. Повышение качества токарной обработки капролона с учетом предварительного термомеханического воздействия. Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. Хабаровск: 2005. — 16 с.
4. Кудинов В. А. Динамика станков/В. А. Кудинов. — М.: Машиностроение, 1967. — 359 с.