



Лошманов А.Ю.
A.Yu. Loshmanov

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

**MATHEMATICAL FORMULATION OF STRAIN FIELDS IN SOME PROBLEMS OF
METALFORMING**

Лошманов Антон Юрьевич – кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой ПМИ Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Комсомольск-на-Амуре, проспект Ленина, 27.

E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Mr. Anton Yu. Loshmanov – PhD in Physics and Mathematics, Deputy Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur). E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Аннотация. Представлен анализ полей остаточных деформаций в окрестности их особенностей (точек, линий разрыва поля скоростей перемещений) в ряде задач обработки металлов давлением.

Summary. The paper presents analysis of strain residual fields in the neighborhood of their features (i.e. points, lines of discontinuity of the displacement/velocity field) exemplified by some problems of metal forming by pressure.

Ключевые слова: деформации, линия разрыва, поле скоростей.

Key words: strain, line of discontinuity, velocity field.

УДК 539.374

Введение

Одной из проблем при решении задач механики деформируемого твердого тела является то, что деформации в пластической области распределяются крайне неравномерно. Основные деформации, как правило, наблюдаются на особенностях поля скоростей перемещений (точек, линий и поверхностей разрывов различного порядка), а также в окрестности точек резкого изменения формы тела (например, угловых точек). Деформации на них значительно превышают деформации в непрерывном поле скоростей перемещений и могут определять процессы разрушения материала. Поэтому особый интерес представляет определение полей деформаций именно в окрестности этих особенностей.

При технологических процессах, таких как прокатка, прессование, штамповка и тому подобные процессы, необратимые деформации достигают десятков и сотен процентов. По сравнению с ними обратимые (упругие) деформации ничтожно малы (около 1 %), и ими следует пренебречь [2]. Поэтому применение теории идеального жесткопластического тела к подобным задачам является оправданным. Более того, эта модель является предельной по отношению к другим более сложным моделям деформируемых сред (упрочняющемуся жесткопластическому телу, упрочняющемуся упругопластическому телу и т.п.). Поэтому решения, полученные в ее рамках, могут служить оценкой для более сложных процессов деформирования [4].

Целью работы является жесткопластический анализ параметров поля деформаций в окрестности его сингулярностей (центра веера поля линий скольжения и линии разрыва скоростей перемещений) в некоторых задачах обработки металлов давлением.

Основные соотношения

В классической теории идеального жесткопластического тела связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и компонентами тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяется ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),$$

где $f(\sigma_{ij})$ – функция текучести, V_i – вектор скорости перемещений.

Будем рассматривать идеальное жесткопластическое тело [1] при условии текучести

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2,$$

удовлетворяющем условию несжимаемости, которое следует из (1)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

В качестве меры деформаций будем использовать тензор конечных деформаций Альманси E_{ij} , который связан с дисторсией $A_{ij} = \partial X_j / \partial x_i$ соотношением

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - A_{ik} A_{jk}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где X_i, x_i – соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты.

Тензоры E_{ij} и ε_{ij} связаны соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} V_k$. В компонентах дисторсии (3) примет вид:

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} V_k + A_{kj} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Ниже рассматриваются примеры интегрирования систем уравнений (3), (4) в окрестности точек разрыва поля скоростей перемещений в условиях плоской деформации.

Уравнения (3) описывают процесс накопления деформаций в областях с непрерывным полем скоростей перемещения. Процесс локализации деформаций в окрестности точки разрыва поля скоростей перемещений, являющегося центром веера линий скольжения, описывается соотношениями (4).

Решение задач теории плоской деформации идеального жесткопластического тела основано на построении двух взаимно ортогональных семейств линий скольжения α и β , касательные к которым совпадают в любой точке с направлением максимальных касательных напряжений и скорости деформации сдвига. Дифференциальные уравнения линий скольжения:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \operatorname{tg} \varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = -\operatorname{ctg} \varphi,$$

где φ – направленный против движения часовой стрелки угол наклона характеристик семейства α к оси абсцисс.

Проекции вектора скорости перемещения u и v на криволинейные оси α и β удовлетворяют соотношениям Гейрингера:

$$du - v d\varphi = 0, \quad dv + u d\varphi = 0.$$

В [3, 4, 5] на основе теории разрывов Адамара-Томаса получены соотношения, определяющие деформации на линии разрыва скоростей перемещений. Изменение компонентов тензора Альманси на линии разрыва выражается через величину $W = H/k$, где абсолютное значение величины

$$H = \frac{[V_\tau]}{G + V_v} k \quad (5)$$

имеет физический смысл объемной плотности энергии диссипации, получаемой материальной частицей при пересечении линии разрыва скоростей перемещений. В (5) $[V_\tau]$ – разрыв касательной составляющей скорости перемещений, G – нормальная скорость распространения линии разрыва, V_v – нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва. Тогда тензор Альманси определяется следующим образом:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -W \\ -W & -W^2 \end{bmatrix}.$$

Некоторые задачи обработки металлов давлением

Рассмотрим течение жесткопластического материала по каналу постоянной высоты с угловым изгибом [3]. Предполагается, что внутренняя поверхность канала абсолютно гладкая. Пусть скорость движения материала в канале равна \mathbf{V} , скорость угловой точки канала – $\mathbf{m} = a'(t)\mathbf{i} + b'(t)\mathbf{j}$ (рис. 1).

Пластическая область состоит из централизованного веера OAB : α -линии – окружности с центром в точке O , β -линии – прямые, сходящиеся в точке O . Поле скоростей в централизованном веере OAB имеет вид:

$$u = -(V + m), \quad v = 0. \quad (6)$$

В выбранной системе координат центр веера OAB является неподвижным:

$$a'(t) \equiv 0, \quad b'(t) \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0. \quad (7)$$

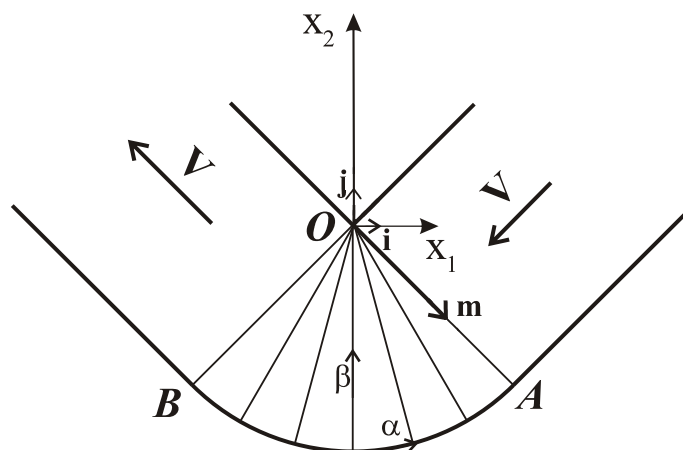


Рис. 1. Канал постоянной высоты

Когда в центре веера линий скольжения сходятся линии семейства β , то, переходя к пределу $R \rightarrow 0$, $S \rightarrow \infty$ и учитывая (6) – (7), система дифференциальных уравнений (4) преобразуется в две независимые системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5]:

$$\begin{cases} \frac{da_{11}}{d\alpha} - a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{21} \cos^2 \alpha = 0, & \frac{da_{12}}{d\alpha} - a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha = 0, \\ \frac{da_{21}}{d\alpha} - a_{11} \sin^2 \alpha + a_{21} \sin \alpha \cos \alpha = 0, & \frac{da_{22}}{d\alpha} - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right]$.

Материал до попадания в веер не деформировался, тогда начальными условиями для систем уравнений (8) являются:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда частные решения систем (8) будут иметь вид:

$$a_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \alpha) \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \sin \alpha,$$

$$a_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \alpha \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} \left(1 - \frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

$$a_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \alpha) \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \sin \alpha,$$

$$a_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \alpha \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

Подставляя найденные компоненты дисторсии в (2), получим распределение деформаций в окрестности центра веера OAB линий скольжения [5] (рис. 2).

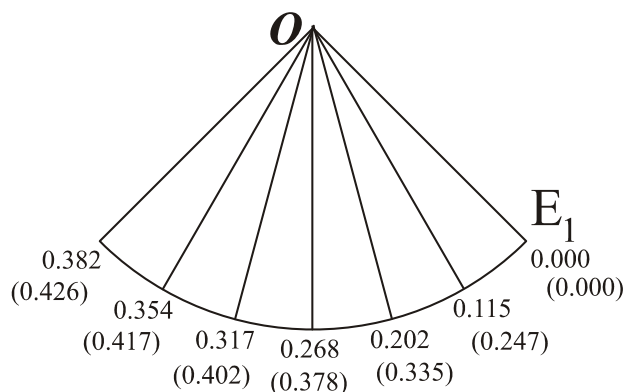


Рис. 2. Распределение деформаций

Удельная мощность диссипации энергии определяется выражением

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\tau_{\max} \varepsilon_{\max},$$

где τ_{\max} – максимальное касательное напряжение, ε_{\max} – максимальная скорость сдвига

$$\tau_{\max} = k, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \frac{1}{S} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right).$$

В рассматриваемом пластическом течении (см. рис. 1) траектории движения частиц совпадают с семейством α -линий и являются окружностями с центром в точке O :

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \quad u = V, \quad v = 0, \quad S = \infty.$$

Поэтому

$$D = 2kV.$$

Время нахождения частицы в веере $T = \frac{\delta R}{V}$, где δ – угол нахождения частицы внутри веера линий скольжения семейства β , отсчитываемый от линии OA .

Удельная диссипация энергии частиц в окрестности точки O определяется в виде

$$H = \int_0^T D dt = 2k\delta, \quad W = \frac{H}{k} = 2\delta.$$

На рис. 2 представлено также распределение деформаций (в скобках) в окрестности точки O при движении центра веера вниз со скоростью $\mathbf{m} = -\mathbf{j}$, что соответствует пластическому течению при внедрении с единичной скоростью плоского штампа в полупространство. Сравнивая полученные значения, видно, что распределение деформаций в окрестности центра веера линий скольжения существенно зависит от его движения.

Исследуем прессование полосы через прямоугольную матрицу [3]. Прессование в условиях плоской деформации рассматривали В.В.Соколовский, Р. Хилл, Быковцев Г.И.

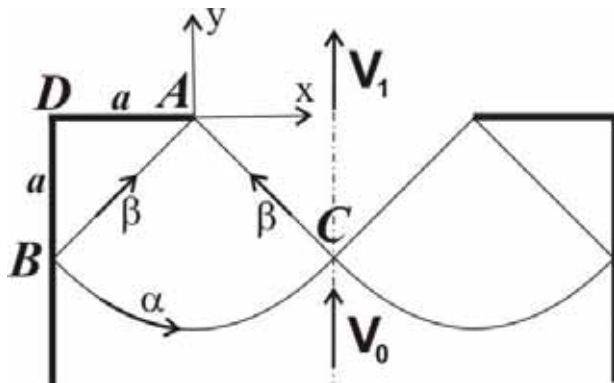


Рис. 3. Прямое прессование

Допустим, что матрица симметрична и имеет жесткие прямолинейные стенки (рис. 3). Через матрицу прессуется полоса из идеального жесткопластического материала: полоса (начальная толщина H), двигаясь со скоростью V_0 под давлением снизу, выходит из матрицы с редуцированной толщиной h . Вследствие несжимаемости материала скорость полосы на выходе из матрицы $V_1 = \frac{H}{h} V_0$. Будем рассматривать матрицу с редуцированием в 50%, т.е. с обжатием заготовки $R = 1 - \frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ и скоростью на выходе

$$V_1 = 2V_0.$$

Вследствие симметрии пластической области рассмотрим только одну половину пластической области по левую сторону от линии симметрии. Полагается, что α -линии – окружности с центром в точке A , β -линии – прямые, сходящиеся в точке A . Пластическая область состоит из централизованного веера ABC и жесткой зоны ADB .

Граничные условия для скоростей на жесткопластических границах имеют следующий вид:

- на линии BC : $v = V_0 \cos \varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

- на линии AC : $u = \sqrt{2}V_0$;

- на линии BA : $u = 0$.

Поле скоростей в центрированном веере, вследствие соотношений (6), примет вид:

$$u = V_0 \left(\sin \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad v = V_0 \cos \varphi.$$

Используя соотношения на линиях разрыва скоростей перемещений (5) и решая систему дифференциальных уравнений (4), получим распределение поля остаточных деформаций в полосе на выходе из матрицы (рис. 4) (вследствие симметрии процесса показана половина чертежа).

Предложенный подход позволяет описывать поле остаточных деформаций при технологических процессах обработки металлов давлением: в листовых деталях при их выглаживании угловым штампом; при прямом и обратном прессовании полосы через прямоугольную матрицу, при прошивке полосы.

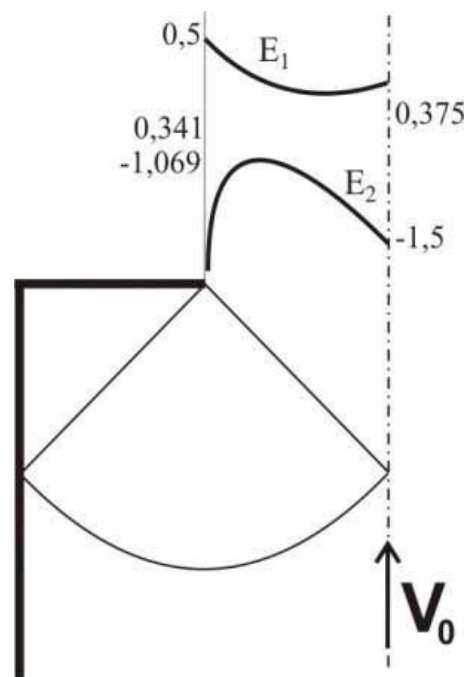


Рис. 4. Деформации

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 529 с.
2. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с.
3. Лошманов, А. Ю. Расчет полей деформаций в задачах обработки материалов давлением / А. Ю. Лошманов // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 127-133.
4. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел / А.И. Хромов. – Владивосток: Дальнаука, 1996. – 181 с.
5. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Доклады АН. – 2006. – Т. 407. – № 1.