

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
MATHEMATICS AND MECHANICS

Тарануха Н. А., Петрова А. Н., Любушкина Н. Н.
N.A.Taranukha, A.N.Petrova, N.N.Lyubushkina

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОЙ СВЯЗИ
ИЗ НЕСТАНДАРТИЗИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ
СИСТЕМЫ С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ**

**MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF A FLEXIBLE COUPLING MADE
OF NON-STANDARDIZED MATERIAL FOR A DYNAMIC SYSTEM WITH LARGE
DEFORMATIONS**



Тарануха Николай Алексеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Кораблестроение» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: taranukha@knastu.ru.

Mr. Nikolay A. Taranukha – Doctor of Engineering, Professor, Head of the Department of Shipbuilding, Komsomolsk-on-Amur State Technical University. E-mail: taranukha@knastu.ru



Петрова Анна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры МОП ЭВМ Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: Petrovaan2006@yandex.ru.

Ms. Anna N. Petrova – PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Computer Software and Computing, Komsomolsk-on-Amur State Technical University. E-mail: Petrovaan2006@yandex.ru



Любушкина Надежда Николаевна – доцент кафедры «Промышленная электроника» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: nadka_lub@mail.ru.

Ms. Nadezhda N. Lyubushkina – Associate Professor, Department of Industrial Electronics, Komsomolsk-on-Amur State Technical University. E-mail: nadka_lub@mail.ru

Аннотация. В статье приведены результаты исследования нелинейно-упругого нестандартизированного материала, допускающего большие деформации, более 100 %. Проанализированы различные варианты математической модели для расчета модуля упругости.

Summary. This paper presents the results of a study of nonlinear-elastic non-standard material, allowing for large strains of more than 100%. Various options for a mathematical model to calculate the elastic modulus are analyzed.

Ключевые слова: нелинейные деформации, большие деформации, математическая модель, модуль упругости.

Key words: nonlinear deformation, large deformation, mathematical model, modulus of elasticity.

УДК 539.3:534.1:517.958:517.958

Введение

Для расчетов на прочность любых конструкций требуется знание закона деформирования $\sigma(\varepsilon)$ материала, из которого изготовлена конструкция. В случае линейно-упругой деформации достаточно знать модуль упругости E . В случае нелинейно-упругой деформации модуль упругости уже не константа, а некоторая функция, которую нужно определить.

Существуют материалы (резина), которые в процессе деформирования изменяют объем образцов. Для определения математической модели процесса деформирования нестандартизированного материала требуется выбор теоретических положений и допущений, вывод формул.

1. Описание эксперимента

Для формализации математической модели деформирования нестандартизированного материала необходим эксперимент. Для проведения физического эксперимента выбраны монолитные резиновые жгуты с разной формой поперечного сечения: образец 1 круглого поперечного сечения, образец 2 квадратного поперечного сечения, образец 3 прямоугольного поперечного сечения. Длина рабочей части каждого образца как минимум в 15 раз больше относительного размера поперечного сечения.

Анализ деформированного состояния основан на геометрических соотношениях. В продольном направлении стержень удлиняется на величину $\Delta l = \Delta y$, где Δy – перемещение конечной точки стержня вдоль оси OY после деформации. При растяжении происходит утонение и изменение размеров по соответствующим осям: Δx , Δz . Для увеличения точности и уменьшения погрешности делались многократные измерения геометрических размеров стержня. Экспериментальные данные нормировались.

По экспериментальным данным построены характеристики удлинения образцов в зависимости от величины приложенной силы (рис. 1, а). Далее по статье значение индекса определяет принадлежность образца.

Характеристика утонения образцов построена на рис. 1, б. Необходимо отметить, что утонение образцов в эксперименте происходило равномерно по всей длине, за исключением участков закрепления в опорах. Для большей точности промер производился в нескольких местах. Так как материал образцов изотропный, утонение по осям OX и OZ одинаковое.

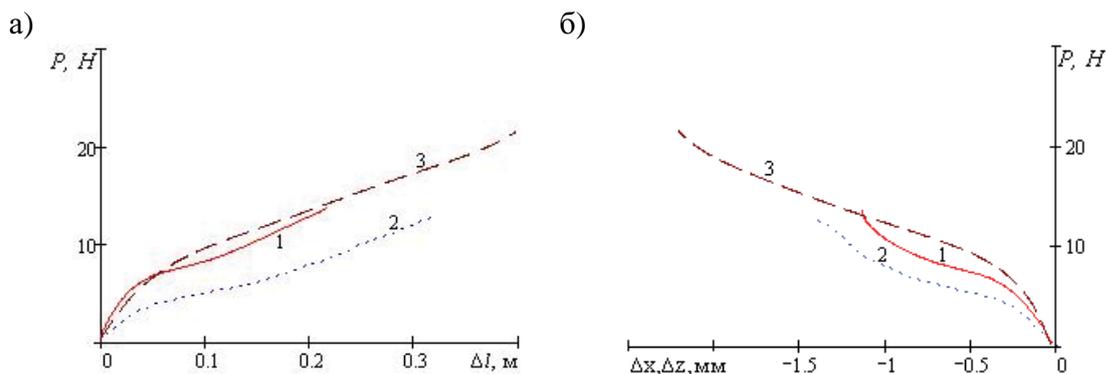


Рис. 1. Характеристики образцов: а – удлинения; б – утонения

Характеристики, приведенные на рис. 2, показывают, что удлинение и утонение происходят по нелинейному закону. Остаточные деформации у всех образцов не выявлены.

2. Определение деформации

Линейная деформация (мера Коши), представляется в виде:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (1)$$

где $\Delta l = l - l_0$ – удлинение образца; l_0 – длина образца до деформации; l – длина образца после деформации.

Относительная деформация не аддитивна, поэтому при большой деформации используют логарифмическую деформацию Генки:

$$\bar{\varepsilon}_y = \ln(1 + \varepsilon_y).$$

Считается, что за меру деформации можно принять любую безразмерную функцию от $1 + \varepsilon$, если при $(1 + \varepsilon) \rightarrow 1$ она вырождается в меру деформации Коши (1) [1].

Удлинение стержня в осевом направлении сопровождается уменьшением его поперечных размеров. При деформировании возникает не только продольная (в нашем случае $\varepsilon_y(\Delta l)$), но и поперечная деформация стержня $\varepsilon_x(\Delta l)$. По деформационным характеристикам было определено, что материал изотропный, поэтому $\varepsilon_x(\Delta l) = \varepsilon_z(\Delta l)$.

Отношение поперечной деформации к продольной определяет коэффициент Пуассона. При нелинейной деформации отношение поперечной деформации к продольной – это функция вида:

$$\mu(\Delta l) = \frac{\varepsilon_x(\Delta l)}{\varepsilon_y(\Delta l)} = \frac{\varepsilon_z(\Delta l)}{\varepsilon_y(\Delta l)}. \quad (2)$$

Коэффициент Пуассона не является величиной постоянной, он зависит от величины удлинения.

3. Определение нормальных напряжений

Упругий материал обладает свойствами сплошности, однородности и относительной упругости, поэтому перемещение всякой точки тела вызывается только деформациями ε_y , ε_x , ε_z . Напряжение в каждой точке – это функция деформации:

$$\sigma(\varepsilon) = f_\varepsilon(\varepsilon), \quad (3)$$

где f_ε – функция изменения напряжения от деформации.

Напряжение в стержне определяется отношением усилия в нем к площади поперечного сечения. Для исследуемого материала при больших деформациях происходили значительные изменения площади поперечного сечения образца.

Все дальнейшие расчеты ведутся с учетом изменения площади, которая определяется по формуле:

$$F(\Delta l) = F_0 \exp(-2\mu(\Delta l)\varepsilon_y(\Delta l)),$$

где F_0 – начальная площадь поперечного сечения.

Зависимость напряжения от деформации можно аппроксимировать различными функциями, в данном случае выбран полином пятой степени.

На рис. 2, а построены деформационные характеристики для различных мер деформаций, на рис. 2, б показано сравнение деформационных характеристик для образцов трех форм поперечного сечения.

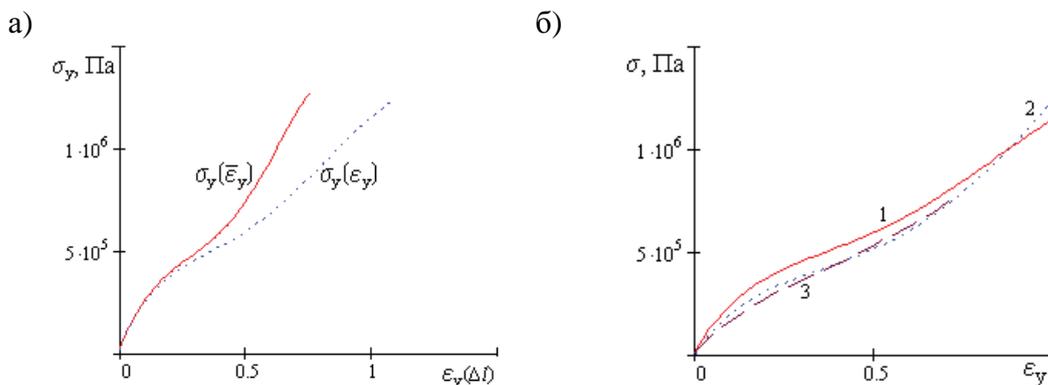


Рис. 2. Деформационные характеристики

Из графиков видно, что деформационная характеристика является нелинейной. Модуль упругости является универсальной характеристикой материала (он не зависит от геометрических характеристик). Данное обстоятельство будет использовано в качестве критерия при выборе наиболее адекватного варианта расчета модуля упругости. Ниже рассмотрены три варианта расчета модуля упругости.

4. Определение модулей упругости нестандартизированного материала упругой связи

Если закон деформирования материала упругой связи определен нелинейной функцией, то по деформационной теории пластичности модуль упругости можно определить двумя способами: как секущий или касательный. Секущий модуль не учитывает историю предварительного нагружения материала, поэтому его определяют через логарифмическую меру деформации. Касательный модуль можно определить через относительную меру деформации.

4.1. Секущий модуль упругости

Независимо от вида напряженного состояния, существует единая зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i , т.е. по аналогии с теорией упругости:

$$\sigma_i = 3G \cdot \varepsilon_i,$$

где G – модуль упругости второго рода.

Ввиду того, что кривая напряжения не зависит от вида напряженного состояния, ее можно экспериментально получить при простом растяжении, а затем перестроить в интенсивности.

При растяжении образца вдоль оси OY :

$$\sigma_i = \sigma_y, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(1 + \mu(\Delta l))\varepsilon_y(\Delta l).$$

Для логарифмической меры деформации определяется секущий модуль упругости $E_{сек}$ по формуле

$$E_{сек}(\Delta l) = \frac{\sigma_i(\Delta l)}{\bar{\varepsilon}_i(\Delta l)}. \quad (4)$$

Сравнение секущих модулей упругости для различных образцов выполнено на рис. 3, а.

4.2. Касательный модуль упругости

По деформационной характеристике $\sigma_y(\varepsilon_y)$ (см. рис. 2, б) касательный модуль упругости $E_{кас}$ найден по формуле

$$E_{кас}(\Delta l) = \frac{d}{d\Delta l}(\sigma(\varepsilon(\Delta l))). \quad (5)$$

Сравнение касательных модулей упругости для разных образцов показано на рис. 3, б.

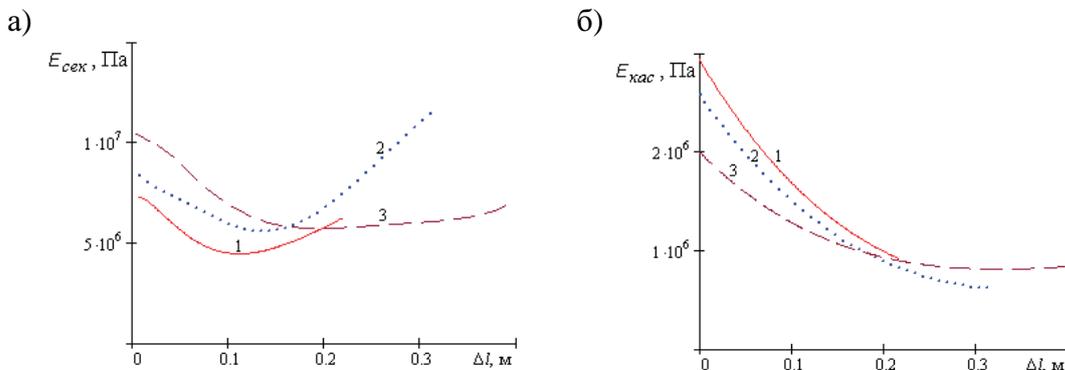


Рис. 3. Модули упругости для разных форм поперечного сечения образцов: а – секущий; б – касательный

По рис. 3 можно сказать, что каждому образцу соответствует свой модуль упругости: секущий и касательный. Это обстоятельство требует исследования и поиска иного способа определения модуля упругости.

4.3. Приведенный модуль упругости для объемной деформации

Поскольку напряженно-деформированное состояние описывается нелинейной функцией, то при выводе обобщенного закона в форме компонентов деформации должна быть предусмотрена возможность учета нелинейных особенностей рассматриваемого процесса на стадии вывода формулы [2].

Для нелинейной деформации была введена функция отношения деформаций $\mu(\Delta l)$ (2), определяющая физические свойства материала [2]. Предполагая справедливым закон независимости действия нагрузок [3], полные деформации вдоль каждой из осей $\varepsilon_y(\Delta l)$, $\varepsilon_x(\Delta l)$, $\varepsilon_z(\Delta l)$ определяются соотношениями, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Ось	Деформация	$\sigma_x(\Delta l)$	$\sigma_y(\Delta l)$	$\sigma_z(\Delta l)$
OX	$\varepsilon_x(\Delta l)$	$\varepsilon_x(\sigma_x)$	$-\mu_{xy}(\Delta l) \cdot \varepsilon_y(\sigma_y)$	$-\mu_{xz}(\Delta l) \cdot \varepsilon_z(\sigma_z)$
OY	$\varepsilon_y(\Delta l)$	$-\mu_{yx}(\Delta l) \cdot \varepsilon_x(\sigma_x)$	$\varepsilon_y(\sigma_y)$	$-\mu_{yz}(\Delta l) \cdot \varepsilon_z(\sigma_z)$
OZ	$\varepsilon_z(\Delta l)$	$-\mu_{zx}(\Delta l) \cdot \varepsilon_x(\sigma_x)$	$-\mu_{zy}(\Delta l) \cdot \varepsilon_y(\sigma_y)$	$\varepsilon_z(\sigma_z)$

Полученная система уравнений представляет одну из форм записи обобщенного закона деформации. Обобщенное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l) = & (\varepsilon_x(\sigma_x) - \mu_{xy}(\Delta l) \cdot \varepsilon_y(\sigma_y) - \mu_{xz}(\Delta l) \cdot \varepsilon_z(\sigma_z)) + \\ & + (\varepsilon_y(\sigma_y) - \mu_{yx}(\Delta l) \cdot \varepsilon_x(\sigma_x) - \mu_{yz}(\Delta l) \cdot \varepsilon_z(\sigma_z)) + \\ & + (\varepsilon_z(\sigma_z) - \mu_{zx}(\Delta l) \cdot \varepsilon_x(\sigma_x) - \mu_{zy}(\Delta l) \cdot \varepsilon_y(\sigma_y)) \end{aligned}$$

Введем допущение: сечение образца по оси OY постоянно, материал изотропен, следовательно, $\mu_{yx}(\Delta l) = \mu_{zx}(\Delta l) = \dots = \mu_{yz}(\Delta l) = \mu(\Delta l)$. Исследуется одноосное растяжение вдоль оси OY , поэтому с учетом гипотезы о ненадавливании волокон друг на друга $\sigma_x = \sigma_z = 0$. Следовательно, соответствующие им деформации $\varepsilon_x(\sigma_x) = \varepsilon_z(\sigma_z) = 0$.

После учета допущений обобщенное уравнение имеет вид

$$\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l) = \varepsilon_y(\sigma_y) \cdot (1 - 2\mu(\Delta l)). \quad (6)$$

Из (6) продольная деформация выражается в виде

$$\varepsilon_y(\sigma_y(\Delta l)) = \frac{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}{1 - 2\mu(\Delta l)}.$$

Полученную деформацию ε_y можно использовать в качестве аргумента для определения напряжения по формуле (3):

$$\sigma_y(\varepsilon_y(\Delta l)) = \sigma_y \left(\frac{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}{1 - 2\mu(\Delta l)} \right). \quad (7)$$

С другой стороны, по аналогии с классической теорией упругости введем линеаризующее допущение, для случая растяжения вдоль оси OY деформацию можно определить:

$$\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l) = \frac{1}{E_{np}(\Delta l)} (\sigma_y(\varepsilon_y(\Delta l))),$$

где $E_{np}(\Delta l)$ – приведенный модуль упругости.

Подставляя σ_y из (7), получим:

$$E_{np}(\Delta l) = \frac{(\sigma_y(\varepsilon_y(\Delta l)))}{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)} = \frac{\left(\sigma_y\left(\frac{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}{1 - 2\mu(\Delta l)}\right)\right)}{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}. \quad (8)$$

На рис. 4 приведены графики изменения приведенного модуля упругости для образцов с разной формой поперечного сечения, выполненных из одного материала.

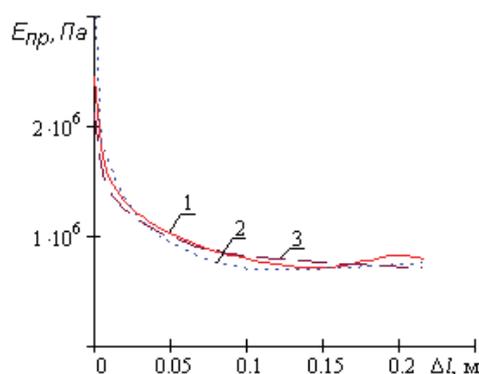


Рис. 4. Приведенный модуль упругости для разных форм образцов

Графики хорошо согласуются, так как приведенный модуль выведен для обобщенного закона с учетом нелинейности деформации материала, поэтому отклонения незначительны.

Заключение

Сравнивая применение текущего модуля упругости, определенного по (4), касательного модуля упругости, определенного по (5), и приведенного модуля упругости, определенного по (8), можно сделать вывод, что при больших деформациях приведенный модуль упругости лучше отражает упругие свойства нестандартизированного материала [4,7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко, Я. И. Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. И. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
2. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебательных процессов в стержне с большими деформациями / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре, ГОУВПО «КнАГТУ», 2007. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007. 903-В2007.
3. Тарануха, Н. А. Теория упругости: учеб. пособие / Н. А. Тарануха. – Хабаровск: ХПИ, 1991. – 87 с.
4. Любушкина, Н. Н. Программно-информационное обеспечение задачи о колебаниях стержня с большими деформациями / Н. Н. Любушкина, А. Н. Петрова, Н. А. Тарануха // Информатика и системы управления. – 2007. – № 2 (14) – С. 30–39.
5. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебаний сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления / Н. А. Тарануха, О. В. Журбин. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 253 с.
6. Тарануха, Н. А. Программно-аппаратный комплекс по обработке результатов эксперимента колеблющейся системы / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре, ГОУВПО «КнАГТУ», 2007. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007. 902-В2007.
7. Тарануха, Н. А. Механика морских динамических систем с большими деформациями из нестандартизированного материала / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 3.