

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**  
**MATHEMATICS AND MECHANICS**

**Прокудин А. Н.**  
**A. N. Prokudin**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ НОВОГО УСТРОЙСТВА  
ДЛЯ РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА**

**NUMERICAL MODELLING OF THE OPERATION OF A NEW ICE-COVER BREAKING  
DEVICE**

**Прокудин Александр Николаевич** – аспирант института машиноведения и металлургии ДВО РАН (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 8(4217)54-95-39. E-mail: sunbeam\_85@mail.ru.

**Mr. Alexander N. Prokudin** – post-graduate student, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Komsomolsk-on-Amur); phone: (4217) 54-95-39; e-mail: [sunbeam\\_85@mail.ru](mailto:sunbeam_85@mail.ru).

**Аннотация.** Работа посвящена численному моделированию процесса разрушения ледяного покрова новым устройством, использующим энергию взрыва газовоздушной смеси. Математическая модель процесса строится с использованием уравнений теории упругости для малых деформаций и уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Сформулированная система уравнений решается апробированным численным методом. В результате проведенных расчетов получена зависимость радиуса области разрушения от геометрических параметров устройства и объема газовоздушной смеси.

**Summary.** The paper deals with numerical modeling of the ice-cover breaking process by means of a new device that uses the energy of air-gas mixture explosion. The mathematical model of the process is built using the equations of the elastic small-deformation theory and the Navier-Stokes equation for viscous incompressible fluid. The established set of equations is solved by a proven numerical method. As a result of numerical calculations, the dependence of the destruction area on geometrical parameters of the device and on the air-gas mixture volume is defined.

**Ключевые слова:** разрушение ледяного покрова, математическое моделирование, напряженно-деформированное состояние.

**Key words:** ice cover breaking, mathematical modelling, stress-strain state.

УДК 539.3

**Введение**

Эффективное разрушение ледяного покрова является одной из наиболее актуальных и важных проблем современной ледотехники и инженерной гляциологии, с которой связано решение множества задач в северных регионах Земли. В первую очередь к таким задачам следует отнести предупреждение и ликвидацию ледяных заторов, которые представляют собой скопления льда в русле реки, возникающего, как правило, во время весеннего ледохода [12; 13]. Наиболее опасным следствием ледяных заторов являются наводнения [12; 13; 16]. В населенной местности наводнения могут привести к катастрофическим последствиям: разрушению промышленных и гражданских сооружений, массовой гибели людей. В Российской Федерации, помимо борьбы с ледовыми осложнениями, большое значение имеет продление навигации на внутренних водных путях. Для обеспечения стабильной навигации в позднеосенний, зимний и ранневесенний периоды года требуется разрушение сплошного ледяного покрова с целью создания судоходного канала, в той или иной мере очищенного от битого льда. В морских акваториях вследствие увеличения добычи углеводородов на континентальном шельфе актуальной и важной задачей является обеспечение безопасности гидротехнических сооружений.

ских сооружений, таких как нефте- и газодобывающие платформы, что в свою очередь также связано с эффективным разрушением ледяного покрова.

Традиционные средства разрушения ледяного покрова обладают рядом недостатков. Использование ледоколов сопряжено с высокими энергетическими затратами, а во многих случаях, например на мелководье, и вовсе невозможно. Взрывной способ разрушения льда [3; 9], при котором во льду или на определенной глубине под ним устанавливаются заряды конденсированного взрывчатого вещества (тротил, аммонит), обладает низкой эффективностью, а также наносит серьезный вред экологии водоема. Аналогичные недостатки характерны для разрушения ледяного покрова путем бомбометания с самолетов. В данной работе рассматриваются способы и устройства локального разрушения ледяного покрова, основанные на использовании энергии взрыва газовоздушных смесей. По сравнению с конденсированными взрывчатыми веществами газовоздушные смеси обладают рядом таких достоинств, как меньшая стоимость и отсутствие губительного влияния на экологию водоема [11].

В работе рассматривается новое устройство для разрушения ледяного покрова, схематично изображенное на рис. 1, состоящее из цилиндра 1, направленного дном в сторону дна водоема. Цилиндр имеет каналы 4, в которых проложена гибкая система 5. Устройство приводится в движение с помощью двигателей 8 и камеры плавучести 9. Работа устройства осуществляется следующим образом: устройство, управляемое с передвижной станции по гибкой системе 5, включающей газовый шланг и электропровод, вплотную подводится к нижней поверхности льда. Поскольку лёд в области нижней поверхности имеет температуру, близкую к температуре плавления, и верхняя сторона стакана, контактирующая со льдом, обладает острыми краями, то устройство врезается в нижнюю поверхность ледяного покрова.

После установки устройства под локальную область ледяного покрова со станции по гибкой системе 5 поступает определенный объем воздушно-газовой смеси, вытесняющий воду из пространства под ледяным покровом, образуя газовоздушную подушку 10. Затем по этой же системе 3 подается искровой разряд в свечи 7. Происходит взрыв газовоздушной смеси. В результате взрыва происходит рост давления в замкнутом объеме и образуется ударная волна, что приводит к разрушению льда. После взрыва газ выходит через многочисленные отверстия 6 в боковой стенке стакана 1, устройство приходит в исходное состояние и перемещается подо льдом в новое место.

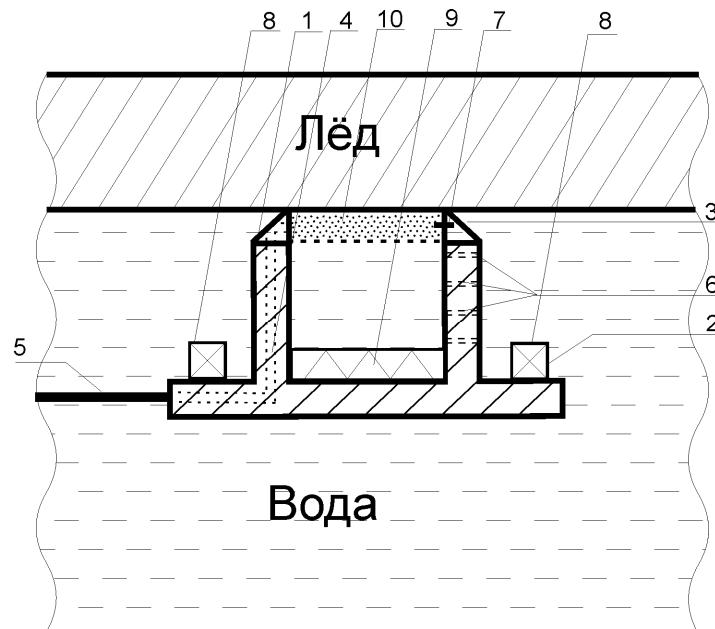


Рис. 1. Устройство для разрушения ледяного покрова

## Математическая модель процесса

Расчетная схема процесса с учетом осевой симметрии представлена на рис. 2, где I – ледяной покров, II – цилиндр, III – вода, IV – газовоздушная смесь. На лед сверху действует атмосферное давление  $p_1$ . Периферийная область находится на значительном расстоянии от смеси III:  $R_4 \gg R_3$ . В области IV задается давление  $p_2$ , которое зависит от состава смеси.

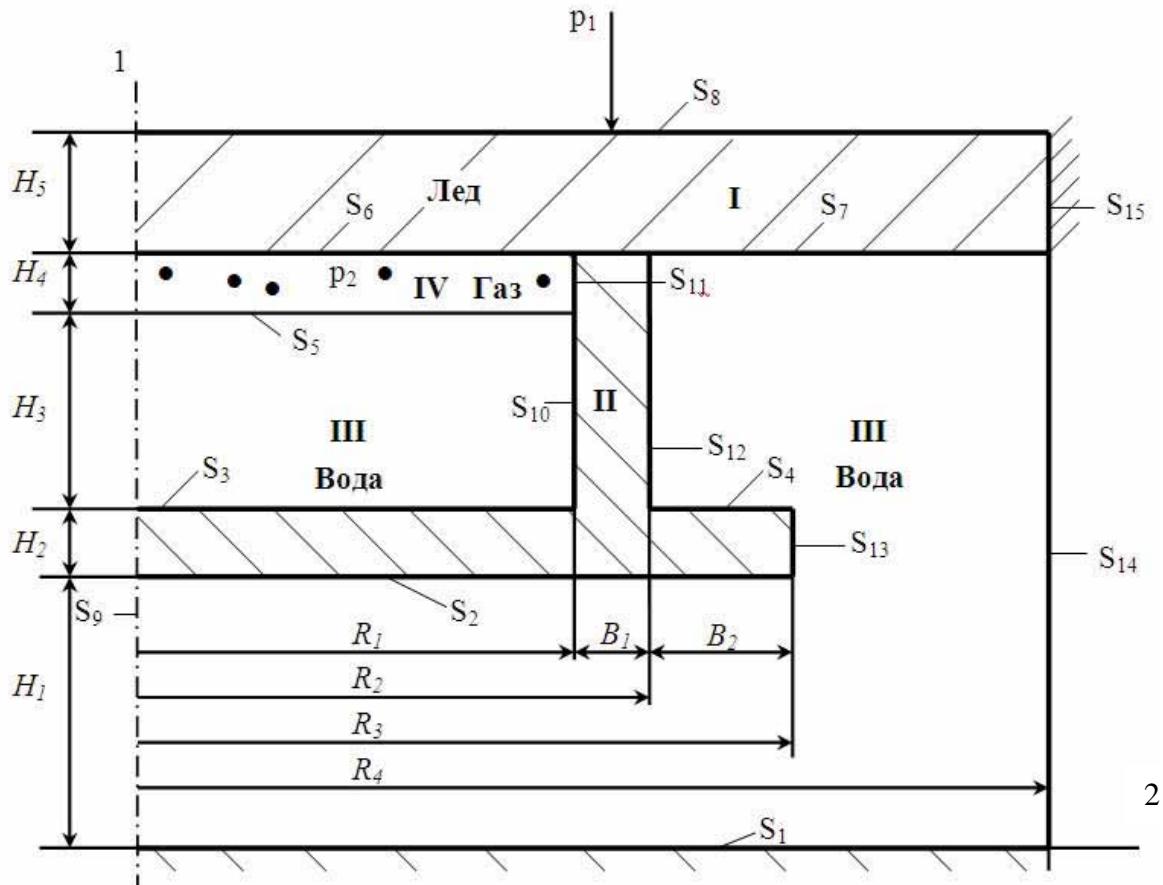


Рис. 2. Расчетная схема процесса

Далее запишем систему определяющих уравнений для областей I, II и III.

Длительность рассматриваемого процесса невелика и примерно равна времени сгорания газовоздушной смеси, которое по данным [10] составляет 0,1 с. В этом случае можно принять [8], что лед (область I) ведет себя, как упругое тело, подчиняющееся закону Гука, и разрушается без возникновения существенных пластических деформаций. Кроме того, морской поликристаллический лед можно принять однородным и изотропным вследствие хаотичного расположения и ориентации зерен кристаллической решетки. Также примем лед несжимаемым. Аналогичные допущения будем использовать для цилиндра (область II). Таким образом, система уравнений в областях I и II в декартовой системе координат выглядит следующим образом: уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i^t = \rho_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad t = I. \quad (1)$$

Закон Гука для несжимаемой среды

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2(G)_t \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad t = I. \quad (2)$$

## Уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0, \quad (3)$$

где  $[\sigma_{ij}]$  – тензор напряжений;  $t$  – идентификатор области;  $F_i^t$  – проекция удельной объемной силы на координатные оси  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\rho_t$  – плотность материала;  $v_i$  – проекция скоростей перемещений на координатные оси  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\tau$  – время;  $\sigma$  – гидростатическое напряжение;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G_t$  – модуль сдвига в области  $t$ ;  $[\varepsilon_{ij}]$  – тензор деформаций; в уравнениях имеет место суммирование по повторяющимся индексам.

Для малых деформаций справедливо равенство  $\xi_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau}$ , где  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций сдвига  $\xi_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$ . Отсюда  $\varepsilon_{ij} = \int \xi_{ij} d\tau \cong \sum_m \xi_{ij} d\tau_m$ , где  $m$  – номер временного шага.

Вода (область III) принималась вязкой, несжимаемой жидкостью. Система уравнений для области III:

- уравнение Навье-Стокса

$$F_i^t - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i = \rho_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad t = II, \quad (4)$$

где  $p$  – давление;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;

- уравнение несжимаемости

$$v_{i,i} = 0. \quad (5)$$

Взрыв газовоздушной подушки (III) моделировался с помощью задания давления  $p_2$  на поверхностях  $S_2, S_4, S_7$  области III. Продолжительность процесса определялась толщиной газовоздушной подушки и скоростью горения смеси  $V_e$  по формуле

$$\tau_e = H_2 / V_e.$$

В ходе процесса давление  $p_2$  изменялось от 0 до конечного давления  $P_e$  по линейному закону. В качестве газовоздушной смеси принимался природный газ, а давление  $P_e$  и скорость горения  $V_e$  задавались с помощью экспериментальных данных [10].

Для построения численной схемы решения задачи системы уравнений (1) – (3) и (4), (5) приводились к единому виду в эйлеровой системе координат для областей I и II:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i^t &= \rho_t \left( v_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad t = I, II, \\ \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2\lambda_t C_{ij}^t, \quad \begin{cases} \lambda_t = G_t; & C_{ij}^t = \varepsilon_{ij}; & t = I \\ \lambda_t = \mu; & C_{ij}^t = \xi_{ij}; & t = II \end{cases}, \\ v_{i,i} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что при подстановке уравнений  $\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2\mu \xi_{ij}$  в уравнение движения при условии несжимаемости жидкости (5), а также при  $\lambda_{II} = \mu$  получим уравнение (4).

Границные условия с учетом осевой симметрии (см. рис. 2)

$$v_3 = 0; \quad \xi_{13} = 0; \quad \xi_{23} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \quad (7)$$



Давление на ледяную пластину

$$\sigma_{11}|_{S_7} = -p_1. \quad (8)$$

Условие непротекания на дне водоёма

$$v_1|_{S_1} = 0. \quad (9)$$

Давление взрыва газовоздушной смеси

$$\sigma_{22}|_{S_{11}} = -p_2; \sigma_{11}|_{S_i} = -p_2, \quad i = 5, 6. \quad (10)$$

Условие на оси симметрии

$$v_2|_{S_9} = 0. \quad (11)$$

Условие на внешней границе расчетной области

$$\sigma_{22}|_{S_{14}} = -p_1 - \gamma_1 H_2 - \gamma_1 h; (0 \leq h \leq H_1). \quad (12)$$

Для закрепления ледяной пластины с основой на поверхности  $S_8$  задавался закон трения в виде

$$\sigma_{21}|_{S_{15}} = -\psi \sigma_s \frac{v_{ck}}{|v_u|}, \quad (13)$$

где  $v_{ck}$  – скорость скольжения области I относительно основы:  $v_{ck} = v_1|_{S_{18}} - v_1^*$ ,  $v_1^*$  – скорость основы,  $v_1^* = 0$ ,  $|v_u|$  – нормирующая скорость;  $\sigma_s$  – условный предел текучести льда;  $\psi$  – коэффициент трения (принималось  $\psi = 1000$ ). При этом скорость на поверхности  $S_8$

$$v_2|_{S_8} = 0.$$

Трение на поверхностях контакта разных областей I, II, III, IV принималось равным нулю

$$\sigma_{21}|_{S_i} = 0, (i = 9, 14); \sigma_{12}|_{S_i} = 0, (i = 1, \dots, 8). \quad (14)$$

Начальные значения скоростей перемещений и деформаций по всем областям I, II, III принимались нулевыми

$$v_1 = 0; v_2 = 0; \epsilon_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

### Методика проведения численных расчетов

Для решения сформулированной системы уравнений (6) с учетом граничных (7) – (14) и начальных условий (15) были разработаны численная схема и алгоритм [5; 6] на основе аппроксимированного численного метода [4; 7].

Задача решалась по шагам времени  $\Delta\tau_m$ ,  $\tau = \sum_m \Delta\tau_m$ .

### Результаты расчетов

При проведении численных расчетов использовались следующие значения физико-механических параметров льда:  $G_1 = 29,2 \cdot 10^3$  кг/см $^2$ , плотность  $\rho_1 = 920$  кг/м $^3$  [1]. Коэффициент динамической вязкости воды по данным [13]  $\mu = 0,017608$  (г·с)/(см $^2$ ), плотность воды:  $\rho_2 = 1000$  кг/м $^3$ .

При анализе напряжений в ледяной пластине использовались следующие прочностные характеристики однолетнего морского зернистого льда:

- предел прочности льда на сдвиг [15]:  $\sigma_u = 0,7$  МПа;
- предел прочности льда при растяжении [1]:  $\sigma_p = 1,5$  МПа;
- предел прочности льда при сжатии [1]:  $\sigma_c = 3$  МПа.

Основные геометрические параметры задачи варьировались следующим образом: радиус цилиндра  $R_1$ : 1; 2; 3; 4 м, толщина газовоздушной подушки  $H_4$ : 2; 3; 4; 5 см, толщина льда  $H_5$ : 1; 1,5; 2; 2,5; 3 м, толщина цилиндра  $H_2$ : 0,1; 0,07; 0,05 м. Глубина акватории  $H_1 = 10$  м. Радиус расчетной области  $R_4 = 20$  м.

Для природного газа по данным [10]  $P_g = 0,7$  МПа,  $V_g = 1$  м/с.

Результаты проведенных расчетов приведены на рис. 3 – 6: виды эпюров скоростей  $v_1$ , нормальных напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{11}$  и касательных напряжений  $\sigma_{21}$  при  $\tau = 0,04$  с. При этом геометрические параметры принимали следующие значения:  $R_1 = 2$  м,  $H_2 = 4$  см,  $H_3 = 2$  м,  $H_4 = 0,1$  м. Видим (см. рис. 3), что в результате взрыва газовоздушной смеси в области IV скорость ледяного покрова в центральной области ( $R \approx 0$ ) выше, чем в периферийной ( $R \approx R_1$ ), вследствие чего нижние слои льда сжимаются, а верхние растягиваются (см. рис. 4). Исходя из принятого критерия, в данном случае верхние слои ледяного покрова от возникающих напряжений разрушаются в радиусе  $R_d \approx R_3 = 2,1$  м, в то время как нижние лишь в радиусе  $R_d \approx 0,8$  м. Поскольку напряжения  $\sigma_{33}$  мало отличаются от напряжений  $\sigma_{22}$ , то можно предположить, что разрушение происходит как в радиальном, так и тангенциальном направлениях. Напряжения  $\sigma_{11}$  в ледяном покрове по модулю невелики и далеки от предела прочности по сжатию  $\sigma_c$ . Касательные напряжения  $\sigma_{21}$  во льду, как и ожидалось, достигают максимального значения при  $R \approx R_1$ .

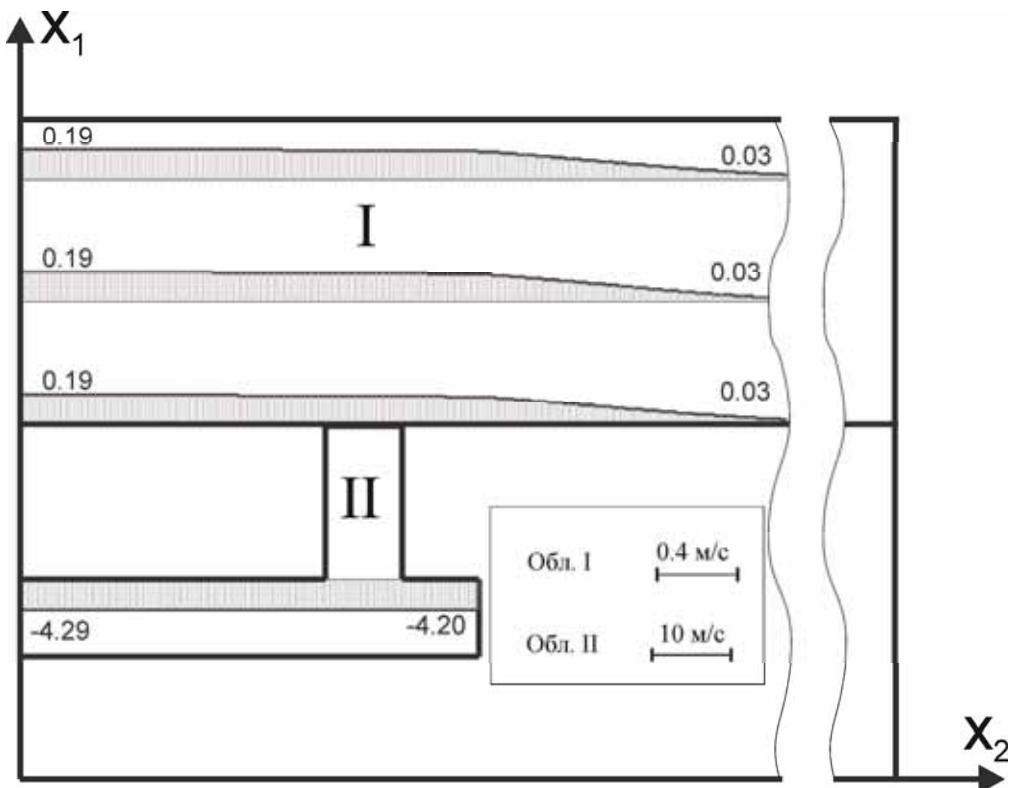


Рис. 3. Эпюры скоростей  $v_1$

Результаты проведенных расчетов обобщены в табл. 1, в которой приведена зависимость радиуса  $R_d$  области разрушения от радиуса цилиндра, толщины газовоздушной подушки и толщины льда. При этом в качестве  $R_d$  выбирается радиус области ледяного покрова, в которой соответствующие предельные значения напряжений достигаются как в верхних, так и в нижних слоях. Видим, что увеличение толщины газовоздушной подушки и радиуса цилиндра приводит к существенному увеличению области разрушения. Максимальная

толщина разрушающегося льда достигает 3 м, при  $R_1 = 4$  м. Толщина цилиндра  $H_2$  на приведенную зависимость влияния практически не оказывает.

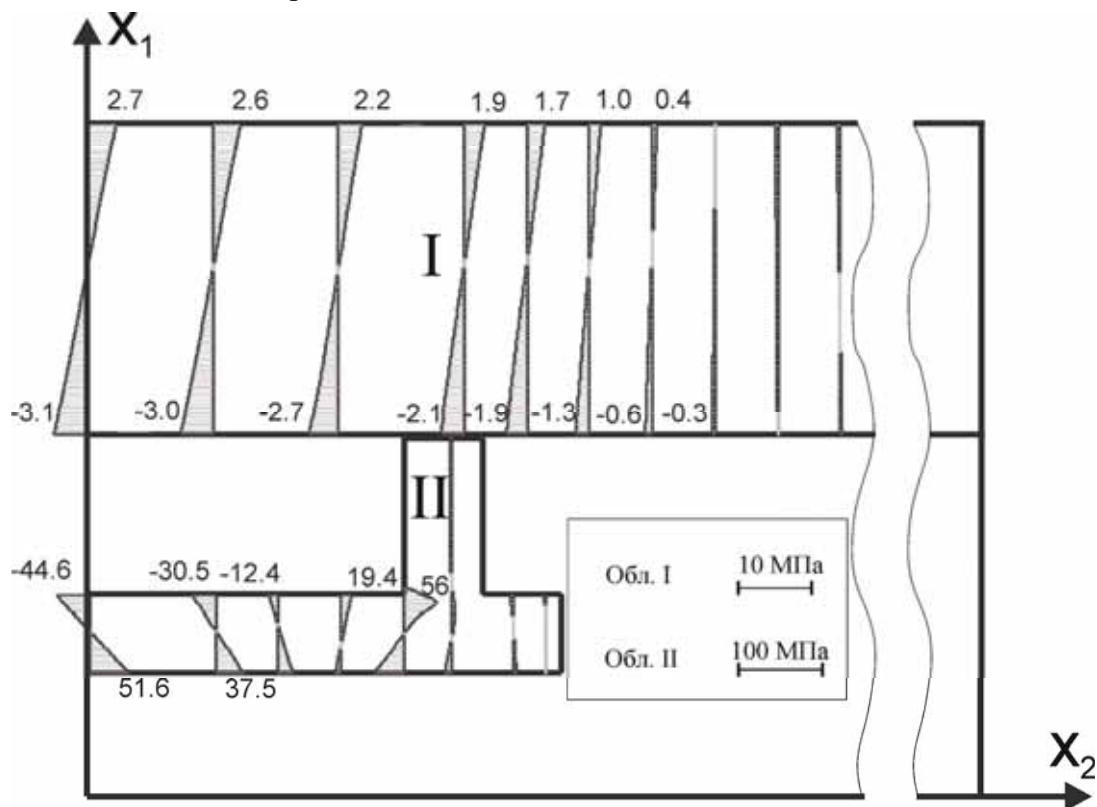


Рис. 4. Эпюры напряжений  $\sigma_{22}$

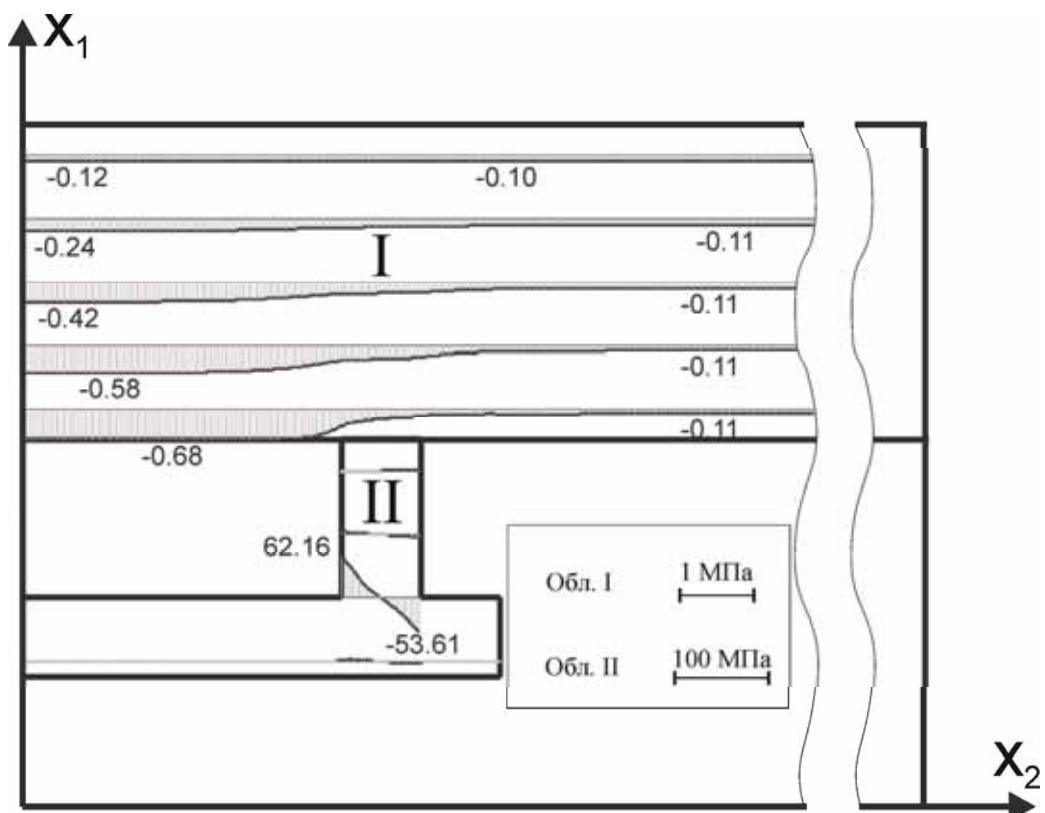
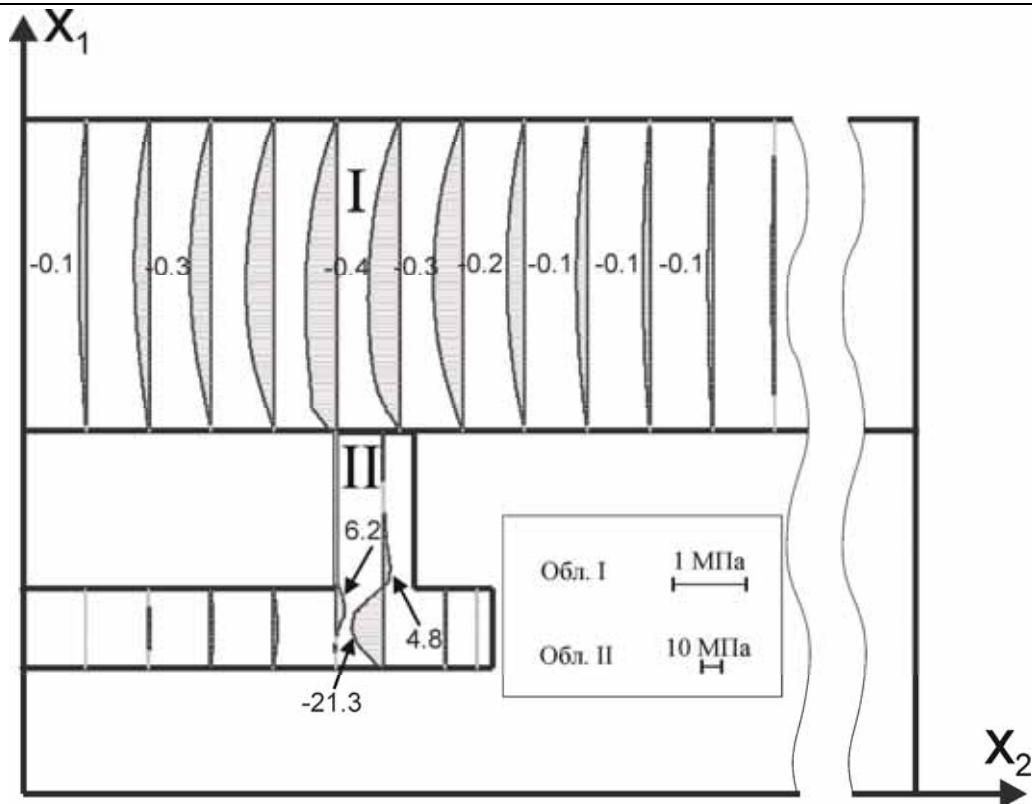


Рис. 5. Эпюры напряжений  $\sigma_{11}$

Рис. 6. Эпюры напряжений  $\sigma_{21}$ 

Напряжения в цилиндре достигают высоких значений (см. рис. 4, 5, 6), которые тем не менее нигде при используемых геометрических параметрах  $R_1$ ,  $H_4$ ,  $H_5$ ,  $H_2$  не выходят за предел текучести стали, который по данным [2] равен 300 МПа.

Таблица 1

Зависимость радиуса области разрушения  $R_d$  от радиуса цилиндра  $R_1$ , толщины газовоздушной подушки  $H_4$ , толщины льда  $H_5$

$R_1$ (м)	$H_4$ (м)	$H_5$ (м)	$R_d$ (м)
1	0,4	1,0	0,2
1	0,5	1,0	0,6
2	0,2	1,0	2
2	0,2	1,5	1,6
2	0,3	1,0	2,4
2	0,3	1,5	1,6
2	0,4	1,0	2,4
2	0,4	1,5	2
2	0,4	2,0	0,8
2	0,5	1,0	2,4
2	0,5	1,5	2
2	0,5	2,0	1,6
3	0,2	1,0	3,5
3	0,2	1,5	3,1
3	0,2	2,0	1,8
3	0,3	1,0	3,6
3	0,3	1,5	3,5



Продолжение табл. 1

$R_1$ (м)	$H_4$ (м)	$H_5$ (м)	$R_d$ (м)
3	0,3	2,0	3
3	0,3	2,5	1,8
3	0,4	1,0	3,6
3	0,4	1,5	3,5
3	0,4	2,0	3,1
3	0,4	2,5	2,4
3	0,4	3,0	1,2
3	0,5	1,0	4,0
3	0,5	1,5	3,6
3	0,5	2,0	3,1
3	0,5	2,5	3
3	0,5	3,0	1,8
4	0,2	1,0	4,5
4	0,2	1,5	4,1
4	0,2	2,0	4
4	0,2	2,5	3,2
4	0,2	3,0	1,6
4	0,3	1,0	4,6
4	0,3	1,5	4,5
4	0,3	2,0	4,2
4	0,3	2,5	4
4	0,3	3,0	3,2
4	0,4	1,0	4,6
4	0,4	1,5	4,5
4	0,4	2,0	4,2
4	0,4	2,5	4
4	0,4	3,0	3,2
4	0,5	1,0	5
4	0,5	1,5	5
4	0,5	2,0	4,6
4	0,5	2,5	4,5
4	0,5	3,0	4,2

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ДВО РАН (код проекта 09-II-УО-03-002).

## ЛИТЕРАТУРА

- Богородский, В. В. Физические свойства. Современные методы гляциологии / В. В. Богородский, В. П. Гаврило. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 384 с.

**Прокудин А. Н.****ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ НОВОГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА**

2. Кроха, В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: справ. / В. А. Кроха. – М.: Машиностроение, 1980. – 157 с.
3. Матвейчук, В. В. Взрывные работы: учеб. пособие / В. В. Матвейчук, В. П. Чурсалов. – М.: Академический проспект, 2002. – 384 с.
4. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одиноков [и др.]. – М.: Наука, 2008. – 176 с.
5. Одиноков, В. И. Моделирование процесса разрушения ледяных заторов / В. И. Одиноков, А. Н. Прокудин // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 1 – С. 110-116.
6. Одиноков, В. И. Численное моделирование процесса деформации элементов конструкции в многокомпонентных системах под действием динамической нагрузки / В. И. Одиноков, А. Н. Прокудин // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 4 – С. 80-95.
7. Одиноков, В. И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В. И. Одиноков. – Владивосток: Дальнаука, 1995. – 168 с.
8. Песчанский, И. С. Ледоведение и ледотехника / И. С. Песчанский. – Л.: Морской транспорт, 1963. – 343 с.
9. Поздняков, З. Г. Справочник по промышленным взрывчатым веществам и средствам взрыва / З. Г. Поздняков, Б. Д. Rossi. – М.: Недра, 1977. – 253 с.
10. Равич, М. Б. Беспламенное поверхностное горение / М. Б. Равич. – М.-Л.: Изд-во академии наук СССР, 1949. – 354 с.
11. Орленко, Л. П. Физика взрыва / под ред. Л. П. Орленко. В 2 т. Т. 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 832 с.
12. Beltaos, S. (Editor) River ice jams – Water Resources Publications. Littleton. Colorado, 1995. – 372 p.
13. Beltaos, S. Progress in the study and management of river ice jams: review // Cold Regions Science and Technology. – 2008. – Vol. 51(1). – P. 2-19.
14. Timco G. W., W.F.Weks A review of the engineering properties of sea ice // Cold regions science and technology. – 2010. – Vol. 60. – P. 107-129
15. Kingham, D. James; Adams, W.A. and McGuire, M.J. Viscosity measurements of water in region of its maximum density. Journal of Chemical & Engineering Data, 1974, Vol 19, No 1. – P. 1-3.
16. Prowse, T. D., Beltaos, S. Climatic control of river-ice hydrology: a review // Hydrological Processes. – 2002. – Vol. 16(4). – P. 805-822.