



Севастьянов Г. М.
G.M.Sevastyanov

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСЧЕТА ГРАНИЦЫ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В РАСПЛАВЕ СТАЛИ

ON A METHOD OF CALCULATING THE SOLIDIFICATION FRONT BORDER IN A STEEL MELT

Севастьянов Георгий Мамиевич – аспирант Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: akela.86@mail.ru.

Mr. Georgiy M. Sevastyanov – post-graduate student, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences. E-mail: akela.86@mail.ru.

Аннотация. Предложен способ численного расчета температурных полей в расплаве стали при его отвердевании, включающий в себя построение границы раздела фаз, с учетом выделяющейся скрытой теплоты кристаллизации. Показана адекватность результатов расчета на основе их качественного соответствия аналитическому решению одной модельной задачи.

Summary. A method of numerical calculation of temperature fields in a steel melt during solidification is suggested; it includes building a phase boundary subject to the release of latent crystallization heat. The calculation's adequacy is demonstrated on the basis of its qualitative compliance with analytical solution of one model problem.

Ключевые слова: уравнение теплового баланса, кристаллизация стали, уравнение межфазового перехода, температура ликвидуса, численные методы.

Key words: heat-balance equation, steel solidification, interphase transition equation, liquidus temperature, numerical methods.

УДК 539.3, 621.74

Введение

Расчет температурных полей в задачах математического моделирования литейных процессов является основой для описания термонапряженного состояния в отливках и литейных формах с позиций механики деформируемого твердого тела и в случае использования несвязанной квазистатической постановки представляет собой самостоятельную (и довольно нетривиальную) задачу.

Первые попытки исследования процессов распространения тепла в средах с изменяющимся фазовым состоянием были предприняты еще Ламе и Клапейроном. Математическая постановка задач, ставших классическими, была дана физиком Й. Стефаном, что послужило основой для многих численных и аналитических решений в этой области [1].

Стоит отметить, что аналитические решения некоторых модельных задач данного класса получены, однако при произвольной геометрии области приоритет остается за численными методами.

Численная схема решения уравнения теплопроводности

В работах [2; 3] изложен метод решения уравнения теплопроводности Фурье по явной разностной схеме. По своему существу алгоритм построен на основе известного метода контрольных объемов, теоретическое обоснование которого совпадает с обоснованием метода конечных разностей [4]. Согласно данному методу расчетная область разбивается на криво-

линейные элементы системой ортогональных поверхностей. Для каждого элемента записывается уравнение теплового баланса, которое без учета тепломассопереноса имеет вид:

$$\Delta\tau \cdot \sum_{i=1}^3 (q_i^1 \cdot F_i^1 - q_i^2 \cdot F_i^2) = C \cdot m \cdot \Delta\theta, \quad (1)$$

где $\Delta\theta$ – изменение средней по элементу температуры за время $\Delta\tau$; q_i^1, q_i^2 – тепловые потоки через площади F_i^1, F_i^2 по i -й координате (соответственно в направлении, противоположном i -й координатной оси, и в направлении, совпадающем с i -й координатной осью); C – теплоёмкость; m – масса элемента.

Плотность теплового потока (в случае теплопередачи теплопроводностью) прямо пропорциональна градиенту температуры

$$q = -\lambda \cdot \text{grad } \theta, \quad (2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Для граничных элементов могут иметь место случаи теплопередачи конвекцией или излучением. Тогда соответствующие тепловые потоки на границе записываются, исходя уже из конкретной зависимости от температур поверхности и среды, коэффициента теплоотдачи, степени черноты поверхности и так далее (например, закон Стефана-Больцмана для теплопередачи излучением или соотношения для конвективной теплоотдачи с плоской стенки), что принципиально не меняет разностной схемы и успешно может быть реализовано в её рамках.

Градиент температуры (2) записывается в разностном виде и подставляется в (1), после чего выполняются некоторые преобразования уравнений (1) для каждого элемента. В итоге на каждом шаге по времени формируется симметричная матрица и вектор правых частей системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений температур контрольных объемов в конце этого шага. Элементы матрицы содержат информацию о теплофизических характеристиках, значения которых взяты при известных температурах контрольных объемов в начале этого шага, и о размерах этих объемов. Матрица имеет диагональное преобладание, что позволяет для вычисления искомых температур использовать метод Якоби.

Данный метод применяется для численного моделирования температурных полей в некоторых задачах механики сплошных сред, однако, очевидно, не может быть использован в таком виде для корректного описания процессов распространения тепла при наличии фазового перехода, так как правая часть уравнения теплового баланса (1) не содержит в себе выделяющейся непосредственно в процессе кристаллизации скрытой теплоты.

Моделирование процесса кристаллизации стали

В процессе затвердевания стали образуется двухфазная зона между изотермическими поверхностями солидуса и ликвидуса [5; 6]. При этом остывание расплава от температуры ликвидуса θ_l до температуры солидуса θ_s сопровождается выделением скрытой теплоты кристаллизации L (удельной по массе). Поэтому в данной работе предлагается следующая запись уравнения теплового баланса для элемента:

$$\Delta\tau \cdot \sum_{i=1}^2 (q_i^1 \cdot F_i^1 - q_i^2 \cdot F_i^2) = m \cdot (C \cdot \Delta\theta + L). \quad (3)$$

Предположим следующую схему выделения скрытой теплоты при кристаллизации, соответствующую качественным представлениям о ходе этого процесса (см. рис. 1). Выделение скрытой теплоты кристаллизации начинается при достижении расплавом температуры ликвидуса и продолжается до достижения температуры солидуса, при этом удельное на градус Цельсия выделение тепла $l(\theta)$ линейно растет от нуля при $\theta = \theta_l$ до некоторого макси-

мального значения A при $\theta = (\theta_l + \theta_s)/2$, а затем также линейно начинает снижаться и достигает нуля при $\theta = \theta_s$.

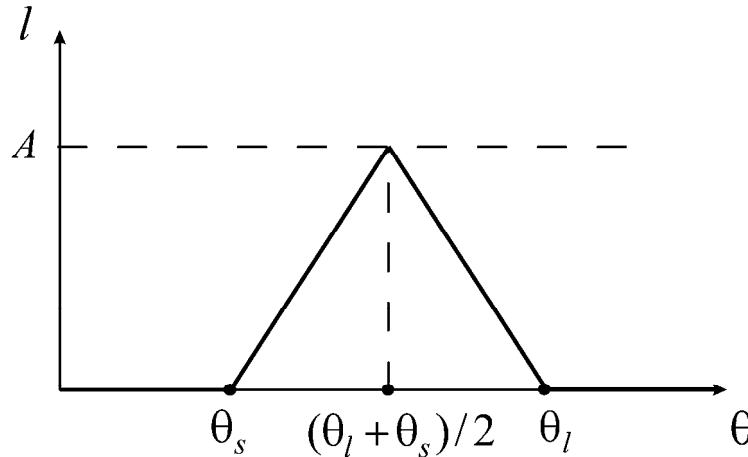


Рис. 1. Схема выделения скрытой теплоты кристаллизации

Так как $L = \int_{\theta_s}^{\theta_l} l(\theta) d\theta$, а указанный определенный интеграл, в свою очередь, пред-

ставляет собой площадь треугольника, то из геометрических соображений имеем $A = 2 \cdot L / (\theta_l - \theta_s)$. Исходя из этого, запишем в аналитическом виде удельное на градус Цельсия выделение теплоты кристаллизации

$$l(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \theta \notin (\theta_s, \theta_l) \\ \frac{2 \cdot L}{\theta_l - \theta_s} \cdot \left[1 - \frac{|2 \cdot \theta - \theta_l - \theta_s|}{\theta_l - \theta_s} \right], & \text{при } \theta \in (\theta_s, \theta_l) \end{cases} \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) имеет вид

$$\Delta\tau \cdot \sum_{i=1}^2 (q_i^1 \cdot F_i^1 - q_i^2 \cdot F_i^2) = [C(\theta) + l(\theta)] \cdot m \cdot \Delta\theta, \quad (5)$$

что позволяет использовать описанную выше численную процедуру для определения температурных полей в условиях фазового перехода, учитывая таким образом выделение скрытой теплоты кристаллизации по соотношению (4).

Пример численного расчета

Рассматривается охлаждение от температуры $\theta|_{x \geq 0} > \theta_l$ и затвердевание расплава стали в области $x \geq 0$ (см. рис. 2). Температура области $x < 0$ считается постоянной на всем протяжении процесса, равной $\theta|_{x < 0} < \theta_s$. Начальная граница раздела фаз – поверхность S_1 , кроме нее, расчетная область ограничена поверхностями S_2, S_3, S_4 ; S_2 – условная верхняя граница, достаточно удаленная (в рассматриваемом примере – на расстояние 100 мм) от начальной поверхности раздела фаз. В этом случае тепловым воздействием слоя расплава, находящегося выше S_2 можно пренебречь.

Соответствующие граничные условия задачи по плотности тепловых потоков

$$q|_{S_1} = -\lambda \cdot \text{grad}\theta, \quad q|_{S_2} = q|_{S_3} = q|_{S_4} = 0.$$

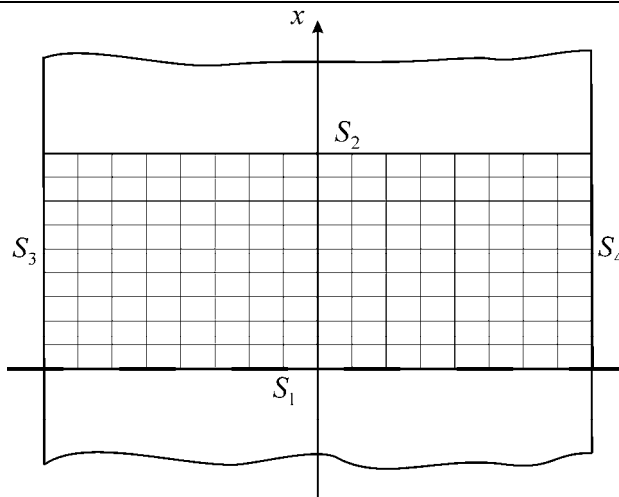


Рис. 2. Схема тестовой задачи

Начальные условия

$$\theta|_{x<0} = 1000 \text{ }^\circ\text{C}, \theta|_{x\geq 0} = 1550 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_l = 1490 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_s = 1400 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Теплофизические параметры стали (марка 45Л) приближенно принимались неизменными в ходе процесса; по справочным данным в соответствующем температурном диапазоне [7; 8]: плотность $\rho = 7200 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость $C = 700 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 28 \text{ Вт/(м}\cdot\text{ }^\circ\text{C)}$; удельная скрытая теплота кристаллизации $L = 0,27 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$.

Для оценки адекватности предложенного способа сравним полученные результаты с аналитическим решением уравнения межфазового перехода (условие Стефана на границе раздела фаз)

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = L \cdot \rho \cdot \frac{dh}{d\tau}, \quad (6)$$

при некоторых упрощающих предположениях, довольно справедливых для рассматриваемой модельной задачи: градиент температуры в жидкой фазе равен нулю, то есть $\frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0$, температура в твердой фазе по толщине изменяется по линейному закону, при этом температура на поверхности раздела фаз равна температуре ликвидуса, то есть $\frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\theta_l - \theta|_{x<0}}{h}$. Тогда

уравнение (6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, решение которого:

$$h(\tau) = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot (\theta_l - \theta|_{x<0})}{\rho \cdot L} \cdot \tau}. \quad (7)$$

Выводы

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов. Кривая 1 представляет собой зависимость толщины h отвердевшего слоя стали от времени процесса, рассчитанную по формуле (7). Кривая 2 – зависимость толщины слоя стали, температура которого опустилась ниже температуры ликвидуса, полученная в результате численных расчетов по описанной схеме (5) с учетом (4) с шагом по времени 0,25 с. Видно вполне приемлемое совпадение расчетной кривой с аналитическим решением поставленной модельной задачи.

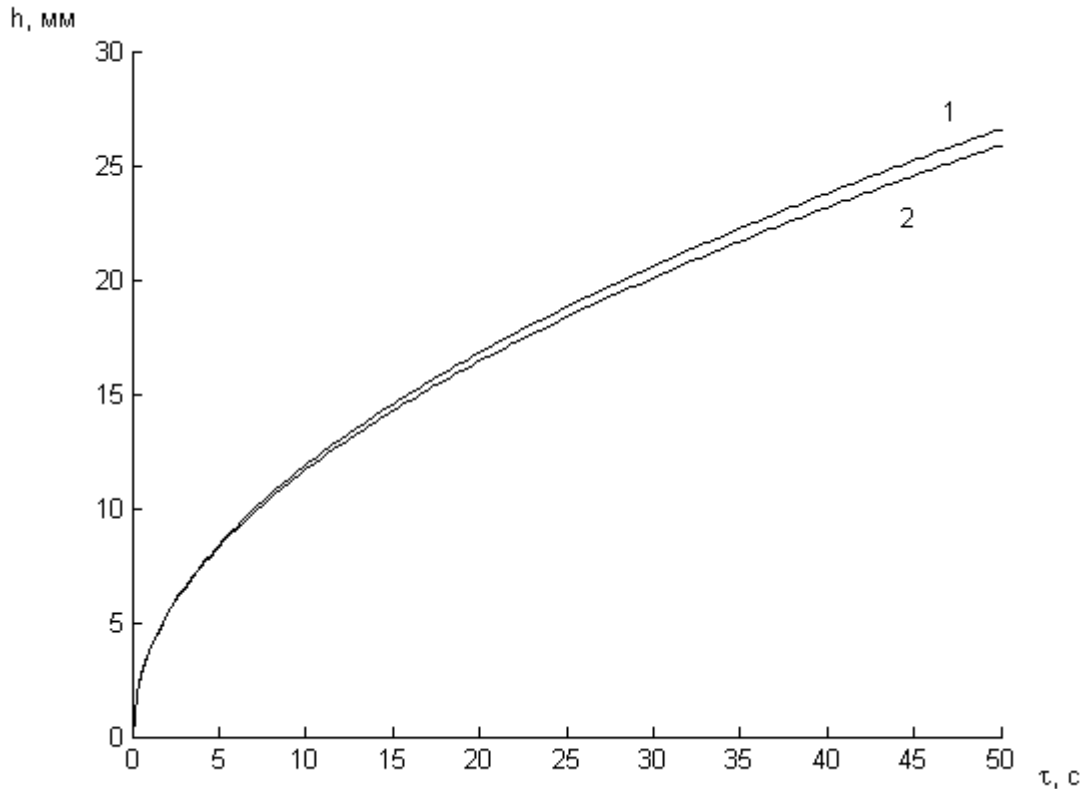


Рис. 3. Сравнение результатов расчета с теоретической кривой

Данный способ довольно прост и может быть использован при расчете температурных полей литейных систем в условиях фазового перехода, в особенности при сложной геометрии отливки, то есть в тех случаях, когда точное аналитическое решение задачи затруднительно. Его разумная область применения – расчет отливок из сталей, так как процессы затвердевания чистых металлов или интерметаллических соединений, имеющих фиксированное значение температуры плавления, не включают выраженной площадки двухфазности (температуры ликвидуса и солидуса практически совпадают), и скрытая теплота кристаллизации в таких металлах выделяется на протяжении крайне узкого температурного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А. И. Уравнения математической физики / А. И. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокоев, Б. Г. Каплунов [и др.]. – М.: Наука, 2008. – 176 с.
3. Одинокоев, В. И. Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом / В. И. Одинокоев. – Владивосток: Дальнаука, 1995. – 168 с.
4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
5. Баландин, Г. Ф. Основы теории формирования отливки / Г. Ф. Баландин. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
6. Борисов, В. Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка / В. Т. Борисов. – М.: Metallургия, 1987. – 224 с.
7. Шишков, М. М. Марочник сталей и сплавов / М. М. Шишков. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 456 с.
8. Зубченко, А. С. Марочник сталей и сплавов / А. С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.