Золотова Т. В.
T.V. Zolotova

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ В ЗАДАЧАХ СТРАТЕГИЧЕСКОГО И ФОНДОВОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

RISK MANAGEMENT METHODS FOR STRATEGIC INVESTMENT AND PRIVATE EQUITY

Золотова Татьяна Валерьяновна – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: tgold11@mail.ru.
Ms.Tatiana V. Zolotova – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, doctoral candidate, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur).

Аннотация. Рассмотрены некоторые функции риска, зависящие от выбора стратегии в сложной системе. Показано применение функций риска для принятия решений относительно инвестиций в ценные бумаги, а также финансирования различных проектов.

Summary. The paper considers some risk functions that depend on a choice of strategy in complex systems. Shown is the application of these risk functions to decision-making concerning investments into securities and financings of various projects.

Ключевые слова: функция риска, управление проектами, фондовое инвестирование, математическое программирование, свертка критериев.

Keywords: risk functions, project management, share investment, mathematical programming, convolution of criteria.

УДК 35.073.5

Введение

В отношении понятия «риск» до сих пор не сложилось однозначного толкования. Это объясняется сложностью данного явления и его недостаточным теоретическим изучением [1]. В существующих трактовках риск определяется:

- как возможная опасность потерь, вытекающая из специфики тех или иных явлений природы, видов деятельности человеческого общества;
- возможность наступления неблагоприятного события, связанного с различными видами потерь;
- вероятность неблагоприятного исхода операции, приводящего к возможному ущербу;
- вероятность неожиданного воздействия определенных факторов, под влиянием которых может произойти отклонение результата от запланированной величины;
- степень неопределенности или непредсказуемости процесса функционирования системы.

Данные определения риска относятся к различным сферам деятельности. Общим для них является связывание риска с вероятностью наступления некоторого события (исхода), приводящего к убыткам, ущербу, потери доходов или появлению дополнительных расходов, отклонению результата от запланированной величины.

Новым направлением совершенствования системы управления различными видами безопасности сложной системы (экономической, технической и т.д.) является процедура анализа и управления риском [3, 6], суть которой сводится к выявлению ситуаций риска, возни-

Поступила в редакцию 19.08.2010

кающих в процессе деятельности, выбору подходящей оценки риска, разработке и реализации мер по снижению уровня риска. Понятие «ситуация риска» можно определить как сочетание, совокупность различных обстоятельств и условий, создающих определенную обстановку для возникновения того или иного неблагоприятного события.

Возникновение неблагоприятного события может привести к тому, что система не достигнет ожидаемого результата своей деятельности. Поэтому становится актуальной изучение деятельности системы в условиях риска. В основе выбора оценки риска возникновения неблагоприятного события лежит выбор меры, определяющей возможные потери или ущерб в виде некоторой функции ущерба или потерь, зависящей от управления или стратегии в системе. Управляющее воздействие на риск представляет собой такую стратегию системы, которая приводит к уменьшению ущерба или потерь, т.е. риска.

Целью данного исследования является разработка новых математических моделей управления риском с использованием различных функций риска и применение разработанных моделей к статическим задачам стратегического и фондового инвестирования. В связи с тем, что в статических моделях не учитывается фактор времени, дисконтирование денежных потоков в данном случае не производится.

Функции риска

1. *Абсолютная функция риска*

Пусть x – стратегия лица, принимающего решение (ЛПР), которая может быть скалярной или векторной величиной; $r(x)$ – случайная функция, определяющая результат деятельности системы в случае возникновения неблагоприятного события; $d(x)$ – функция, определяющая ожидаемый результат деятельности системы, не связанный с возможностью возникновения неблагоприятного события, приводящего к убыткам или потерям. В данном случае имеется в виду, что $d(x)$ не обязательно математическое ожидание величины $r(x)$, и возможно $d(x) \geq r(x), \forall x$, но, в частности, $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x)$, где обозначение M следует понимать как математическое ожидание. Отклонение $r(x)$ от $d(x)$ представляет собой функцию потерь системы. Функцию риска будем задавать в соответствии с выбранной метрикой, считая вероятности возникновения неблагоприятных событий известными.

На наш взгляд, можно выделить следующие абсолютные функции риска $Risk_{abs}$ для выбранной функции потерь.

В общем случае в метрике l_1 классическая функция риска имеет вид

$$Risk_{absl_1cl}(x) = M(|r(x) - d(x)|), \tag{1}$$

где $d(x) = Mr(x)$. Если $d(x)$ не является математическим ожиданием и имеет место $d(x) \geq r(x), \forall x$, то в качестве функции риска в метрике l_1 примем

$$Risk_{absl_1}(x) = M(d(x) - r(x)). \tag{2}$$

Преимущество определения функции риска (1) заключается в том, что при некоторых предположениях относительно типа функций $r(x)$ и $d(x)$ задачу минимизации риска можно свести к задаче математического программирования, для решения которой разработан математический аппарат.

Согласно метрике l_2^2, оценка риска есть дисперсия

$$Risk_{absl_2^2}(x) = M(r(x) - d(x))^2. \tag{3}$$

Метрика l_2 приводит к функции риска в виде среднеквадратического отклонения

$$Risk_{absl_2}(x) = (M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Для функций риска (3) и (4) $d(x)$ является математическим ожиданием.

Использование функции риска (4) удобно для некоторых постановок задач, так как позволяет свести исходные задачи к определенному типу задач математического программирования.

Если деятельность системы зависит от значения некоторого параметра $h \in H$, влияющего на результат $r(h,x)$, или система состоит из H подсистем, влияющих на общий суммарный результат системы, то имеет смысл говорить о максимальной функции риска [10]. Таким образом, в метрике l_∞ максимальная функция риска может иметь одну из следующих форм:

$$Risk_{absl_1,cl,l_\infty}(x) = \max_{h \in H} M(|r(h,x) - d(h,x)|), \tag{5}$$

$$Risk_{absl_1,l_\infty}(x) = \max_{h \in H} M(d(h,x) - r(h,x)), \tag{6}$$

$$Risk_{absl_2^2,l_\infty}(x) = \max_{h \in H} M(r(h,x) - d(h,x))^2, \tag{7}$$

$$Risk_{absl_2,l_\infty}(x) = \max_{h \in H} (M(r(h,x) - d(h,x))^2)^{1/2}. \tag{8}$$

Если система стремится к увеличению ожидаемого результата своей деятельности $d(x)$ и одновременно уменьшению риска, то задача управления риском является двухкритериальной [4]. Используя функцию риска (1) и свертку критериев, приходим к задаче

$$\min_{x \in X} G(-d(x), M(|r(x) - d(x)|)), \tag{9}$$

где X – множество допустимых стратегий системы; G – вид свертки (например, можно взять свертку типа суммы с весовыми коэффициентами).

Аналогично для абсолютных функций риска (2), (3) и (4).

При использовании метрики l_∞ задача снижения риска с функцией риска (5) примет вид

$$\min_{x \in X} G(-f(x), \max_{h \in H} M|r(h,x) - d(h,x)|), \tag{10}$$

где функция $f(x)$ определяет ожидаемый результат деятельности системы.

В зависимости от содержательного смысла в качестве функции $f(x)$ можно брать, например, одну из следующих функций:

$$f(x) = d(\arg\max_{h \in H} M(|r(h,x) - d(h,x)|), x), \tag{11}$$

$$f(x) = \sum_{h=1}^{H} d(h,x). \tag{12}$$

2 *Относительная функция риска*

Иногда требуется оценить риск на единицу выгоды или выигрыша. В этой ситуации можно использовать относительные функции риска $Risk_{rel}$. В соответствии с выбранной метрикой рассмотрим следующие относительные функции риска:

$$Risk_{rell_1}(x) = \frac{M(|r(x) - d(x)|)}{d(x)}, \tag{13}$$

$$Risk_{rell_2}(x) = \frac{(M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}}{d(x)}, \tag{14}$$

$$Risk_{rell_1,l_\infty}(x) = \frac{\max\limits_{h\in H} M(|r(h,x)-d(h,x)|)}{f(x)}, \quad (15)$$

$$Risk_{rell_2,l_\infty}(x) = \frac{\max\limits_{h\in H}(M((r(h,x)-d(h,x))^2))^{1/2}}{f(x)}. \quad (16)$$

Здесь управление риском заключается в выборе такой стратегии системы x, чтобы минимизировать относительную функцию риска. Например, для функции риска (13) получаем задачу

$$\min_{x\in X}\frac{M(|r(x)-d(x)|)}{d(x)}. \quad (17)$$

Аналогичные постановки задач можно сформулировать для других относительных функций риска (14), (15), (16). При этом можно говорить, что относительная функция риска является сверткой типа отношения.

3 *Оценка мероприятий по снижению риска*

Принятие решений по снижению риска предусматривает оценку экономической эффективности мероприятий по снижению риска. В качестве функции риска может использоваться величина экономического ущерба на единицу затрат на реализацию рассматриваемого мероприятия или совокупности таких мероприятий. Пусть $C(x)$ – неотрицательная функция затрат на реализацию мероприятий по снижению риска. Используя абсолютные функции риска (1) – (8), определим новые относительные функции риска. Например, для абсолютной функции риска (2) имеем

$$Risk_{rell_1,C}(x) = \frac{M_{C(x)}(d(x)-r(x))}{C(x)}, \quad (18)$$

где $M_{C(x)}(d(x)-r(x))$ означает, что математическое ожидание величины $d(x)-r(x)$ зависит от значения $C(x)$ (например, через условные вероятности).

В большинстве случаев на объем материальных средств, расходуемых на мероприятия по снижению риска, наложены ограничения. Тогда задача управления риском с использованием свертки критериев определенного типа G будет иметь вид

$$\min_x G\left(-d(x), \frac{M_{C(x)}(d(x)-r(x))}{C(x)}\right), \quad (19)$$

$$C(x) \le C_{\max}, \quad x\in X,$$

где $C_{\max}$ – максимальный объем имеющихся в распоряжении средств.

Если руководствоваться принципом нормирования, то постановка задачи управления риском примет другой вид

$$\min_x G(-d(x), C(x))$$

$$\frac{M_{C(x)}(d(x)-r(x))}{C(x)} \le Risk_{re}, \quad x\in X, \quad (20)$$

где $Risk_{re}$ есть приемлемый уровень риска. Аналогично для абсолютной функции риска (6).

4 *Вероятность как функция риска*

Пусть известно некоторое требуемое значение результата деятельности системы r_α. Тогда функцию риска можно представить в виде

$$Risk_{prob\alpha}(x) = P(r(x) < r_\alpha). \quad (21)$$

Для ожидаемого результата деятельности системы функции риска есть

$$Risk_{probr}(x) = P(r(x) < d(x)), \quad (22)$$

$$Risk_{prob\delta}(x) = P(d(x) - r(x) \ge \delta),\ \delta > 0. \quad (23)$$

Для функций риска (21) – (23) задачи управления риском можно представить в виде

$$\min_{x \in X} P(r(x) < r_\alpha). \quad (24)$$

$$\begin{gathered} \max_x d(x) \\ P(r(x) < d(x)) \le \alpha, \quad x \in X. \end{gathered} \quad (25)$$

$$\begin{gathered} \max_x d(x) \\ P(d(x) - r(x) \ge \delta) \le \beta, \quad x \in X. \end{gathered} \quad (26)$$

Методы управления риском в задачах стратегического инвестирования

Предположим, что существует некоторый центр (государство, регион, корпорация и т.д.), имеющий в своем распоряжении некоторую сумму денег для финансирования множества различных проектов (программ), например проектов, связанных с перестройкой технологии производства, строительством нового микрорайона, усовершенствованием системы образования, разработкой мероприятий по обеспечению безопасности и предупреждением чрезвычайных ситуаций в государстве или регионе и т.п. Необходимо распределить имеющиеся средства между проектами так, чтобы по возможности максимизировать суммарные выгоды от реализации проектов. Вопросы управления проектами освещены, например, в работе [2]. Для принятия разумного решения о реализации проектов считаем необходимым сравнивать ожидаемую отдачу от реализации проектов с возможными потерями в случае возникновения неблагоприятного события, которое может привести к уменьшению ожидаемой выгоды от реализации проекта.

Пронумеруем проекты индексом i, $i = 1,...,n$, n – количество рассматриваемых проектов. Пусть x_i – объем денег, выделяемых для реализации i-го проекта; $d_i(x_i)$ – функция ожидаемых выгод от внедрения i-го проекта; $r_i(x_i)$ – функции выгод от реализации i-го проекта в случае возникновения неблагоприятного события, $r_i(x_i) \le d_i(x_i)$. Будем считать, что неблагоприятные события возникают с некоторой вероятностью, не связаны друг с другом, вероятность возникновения более одного неблагоприятного события пренебрежимо мала. Поэтому решение об объеме финансирования того или иного проекта удобно в данном случае принимать, руководствуясь функцией риска, заданной в метрике l_∞, т.е. определять тот проект, который приносит максимальный риск.

Абсолютная функция риска в форме (6) имеет вид

$$Risk_{absl_1,l_\infty}(x) = \max_{1 \le i \le n} M(d_i(x_i) - r_i(x_i)). \quad (27)$$

Так как $d_i(x_i)$ не является случайной величиной, то

$$Risk_{absl_1,l_\infty}(x) = \max_{1 \le i \le n}(d_i(x_i) - Mr_i(x_i)). \quad (28)$$

Тогда задача управления риском есть

$$\min_{x \in X} G\left(-\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i), \max_{1 \le i \le n}(d_i(x_i) - Mr_i(x_i))\right), \quad (29)$$

где $X = \{x = (x_1,...,x_n) \mid x_i \ge 0, i = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i \le C\}$, C – средства, распределяемые между проектами.

Предположим, что функции $r_i(x_i)$, $d_i(x_i)$, $i = 1,...,n$ линейные: $r_i(x_i) = r_i' x_i$, $d_i(x_i) = d_i' x_i$, где коэффициенты r_i' и d_i' означают выгоду (например, прибыль) в случае возникновения неблагоприятного события и ожидаемую, соответственно, с единицы вложенных средств. Тогда, взяв в качестве G линейную свертку с весовым коэффициентом α, с помощью введения новой переменной $z = \max_{1 \le i \le n}(d_i(x_i) - Mr_i(x_i)))$ задачу (29) можно свести к задаче линейного программирования (ЗЛП)

$$\max_{x,z}(\alpha \sum_{i=1}^{n} d_i' x_i - (1-\alpha) z)$$

$$d_i' x_i - \bar{r}_i' x_i \le z, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \le C, \quad x_i \ge 0, i = 1...,n, \tag{30}$$

где $\bar{r}_i'$ – математическое ожидание случайной величины r_i'. Весовой коэффициент α показывает отношение центра, распределяющего средства, к риску. Чем ближе α к нулю, тем больше центр не желает рисковать.

Все вычисления в приведенных ниже примерах произведены с использованием прикладного программного обеспечения MathCAD.

Пример 1. Рассмотрим пять проектов, между которыми необходимо распределить имеющиеся средства C в объеме 100 ден. ед. Известна ожидаемая прибыль с единицы вложенных в каждый проект средств: $d_1' = 3$, $d_2' = 5$, $d_3' = 4$, $d_4' = 6$, $d_5' = 2$. Математические ожидания случайных величин $r_i', i = 1,...,5$ есть $\bar{r}_1' = 2{,}8$, $\bar{r}_2' = 2$, $\bar{r}_3' = 1{,}5$, $\bar{r}_4' = 1$, $\bar{r}_5' = 1{,}7$. Для нахождения оптимального распределения средств между проектами решим задачу (30), используя функцию Maximize. Для α, принадлежащего интервалу $[0{,}04;\ 0{,}11]$, имеем следующее распределение средств между проектами: $x^0 = (53{,}957; 3{,}957; 4{,}317; 2{,}158; 35{,}971)$; ожидаемая прибыль $\sum_{i=1}^{5} d_i' x_i^0$ при этом составит 282,014, максимальный риск $d_i' x_i^0 - \bar{r}_i' x_i^0$ имеет значение 10,791. Для $\alpha = 0{,}5$ получаем $x^0 = (0; 35{,}714; 42{,}857; 21{,}429; 0)$, ожидаемая прибыль составит 478,571, максимальный риск имеет значение 107,143. При $\alpha = 0{,}8$ имеем $x^0 = (0; 62{,}5; 0; 37{,}5; 0)$, ожидаемая прибыль составит 537,5, максимальный риск имеет значение 187,5.

Чем больше центр избегает риска, тем больше средств он вкладывает в проекты с меньшим отклонением от ожидаемой прибыли, т.е. для данного примера наибольшее количество средств вкладывается в первый и пятый проекты. Самым рискованным является четвертый проект: для α, принадлежащего интервалу $[0{,}9;\ 0{,}99]$, имеем $x^0 = (0; 0; 0; 100; 0)$, ожидаемая прибыль составит 600, максимальный риск имеет значение 500. Из примера видно, что при изменении параметра α прибыль растет медленнее, чем риск. Поэтому желание получить прибыль как можно больше, например в случае $\alpha \in [0{,}9;\ 0{,}99]$, может привести к результату (прибыли) меньшему, чем при использовании менее рискованной стратегии, например для $\alpha \in [0{,}04;\ 0{,}11]$.

Использование относительной функции риска приводит к другой постановке задачи управления риском

$$\min_{x\in X}\frac{\max\limits_{1\le i\le n}(d_i(x_i)-Mr_i(x_i))}{\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(x_i)}, \tag{31}$$

где $X=\{x=(x_1,...,x_n)\,|\,x_i\ge 0, i=1,...,n, \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le C\}$.

Также предполагая, что функции $r_i(x_i)$, $d_i(x_i)$, $i=1,...,n$ линейные: $r_i(x_i)=r_i'x_i$, $d_i(x_i)=d_i'x_i$, сведем задачу (31) к ЗЛП. Для этого введем переменные $u=(\sum\limits_{i=1}^{n}d_i(x_i))^{-1}$, $z=\max\limits_{1\le i\le n}(d_i(x_i)-Mr_i(x_i))$. Тогда имеем $d_i(x_iu)-Mr_i(x_iu)\le zu$ или $d_i'x_iu-\overline{r}_i'x_iu\le zu$, $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i'x_iu=1$, $x_iu\ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iu\le Cu$, $i=1,...,n$. Введем обозначение $v=uz$, $w_i=x_iu$. Задача (31) примет вид

$$\min_{u,v,\overline{w}} v$$

$$d_i'w_i-\overline{r}_i'w_i\le v, \sum_{i=1}^{n}w_i\le Cu, \sum_{i=1}^{n}d_i'w_i=1, w_i\ge 0, i=1,...,n, u\ge 0, v\ge 0. \tag{32}$$

Если $(u^0,v^0,\overline{w}^0)$ – решение задачи (32), то $x_i^0=\dfrac{w_i^0}{u^0}, i=1,...,n$ – компоненты оптимального плана задачи (31) для линейных функций $r_i(x_i)$, $d_i(x_i)$, $i=1,...,n$.

Пример 2. Используя данные из примера 1, найдем оптимальное распределение средств между проектами для свертки типа отношения (31). Решая задачу (32) с использованием функции Maximize, получаем $u^0=0{,}0035$, $\overline{w}^0=(0{,}191;0{,}013;0{,}015;0{,}0076;0{,}128)$. Тогда решение задачи (31) (оптимальное распределение средств между проектами) имеет вид $x^0=(53{,}957;3{,}957;4{,}317;2{,}158;35{,}971)$. Найденное решение задачи (31) совпадает с решением задачи (30) в примере 1 для $\alpha\in[0{,}04;0{,}11]$.

Рассмотрим ситуацию, когда центр имеет возможность осуществлять мероприятия по снижению риска. Например, на предприятии планируются разработка и внедрение новой технологической линии, одновременно с этим планируется строительство нового цеха, ведется усовершенствование социальной сферы. Задача состоит в выборе такого плана реализации проектов, который является менее рискованным и дает по возможности максимальный эффект от реализации проектов. При этом центр, планирующий реализовывать проекты, может вкладывать дополнительные средства на снижение риска, т.е. осуществлять меры по предотвращению возникновения неблагоприятных событий. Вероятности возникновения неблагоприятных событий при этом уменьшаются с ростом дополнительных вложений.

Пусть x_i – план реализации мероприятий по внедрению i-го проекта, $i=1,...,n$, $x=(x_1,...,x_n)$; $C_{\max}$ – имеющиеся в распоряжении деньги для снижения риска проектов; $C_i(x_i)$ – деньги, вкладываемые на снижение риска i-го проекта; $p_i(C_i(x_i))$ – убывающая вектор-функция вероятностей возникновения ситуаций риска в i-м проекте.

Тогда управление риском сводится к решению задачи

$$\min_x G\left(-\sum_{i=1}^n d_i(x_i), \frac{\max\limits_{1\le i\le n}(d_i(x_i) - \langle p_i(C_i(x_i)), r_i(x_i)\rangle)}{\sum_{i=1}^n C_i(x_i)}\right)$$

$$\sum_{i=1}^n C_i(x_i) \le C_{\max}, \quad x \ge 0,$$

или

$$\min_x G(-\sum_{i=1}^n d_i(x_i), \max_{1\le i\le n}(d_i(x_i) - \langle p_i(C_i(x_i)), r_i(x_i)\rangle))$$

$$\sum_{i=1}^n C_i(x_i) \le C_{\max}, \quad x \ge 0,$$

или

$$\min_x G(-\sum_{i=1}^n d_i(x_i), \sum_{i=1}^n C_i(x_i))$$

$$\max_{1\le i\le n}(d_i(x_i) - \langle p_i(C_i(x_i)), r_i(x_i)\rangle) \le Risk_{re}, \quad x \ge 0.$$

Представленные постановки задач инвестирования и реализации проектов с использованием минимаксной функции риска позволяют снизить риск самого рискованного проекта. Тем самым можно говорить, что риск проектов выравнивается.

Методы управления риском в задачах фондового инвестирования

Рассмотрим инвестиции в ценные бумаги. Предположим, что имеется n видов ценных бумаг. Инвестору необходимо принять решение о наиболее выходном вложении средств в те или иные ценные бумаги, т.е. сформировать портфель ценных бумаг. Ценность портфеля характеризуется понятием доходность. Так как большинство инвесторов предпочитают избегать риска неполучения ожидаемой доходности, то возникает проблема формирования портфеля ценных бумаг, который доставлял бы по возможности наибольшую доходность и имел бы наименьший риск [5, 7].

На фондовом рынке большинство ценных бумаг имеют ненулевую корреляцию, т.е. оказывают влияние друг на друга. Поэтому считаем правильным оперировать функцией риска, заданной в метрике l_1, l_2^2 (дисперсия) или l_2 (среднеквадратическое отклонение). Следует упомянуть, что многие финансовые аналитики использовали именно такие метрики для оценки риска на фондовом рынке. В задаче Г. Марковица риск определен в метрике l_2^2 как дисперсия портфеля ценных бумаг [9], Г. Конно и Г. Ямазаки оценивали риск в метрике l_1 [8].

Пусть r_i – доходность i-й ценной бумаги, являющаяся случайной величиной; $\bar{r}_i$ – ожидаемая доходность i-й ценной бумаги, $i = 1,\dots,n$; σ_{ij} – ковариация i-й и j-й ценных бумаг; x_i – доля средств, инвестируемая в i-ю ценную бумагу. Тогда задачу управления риском портфеля можно представить в виде

$$\min_{x\in X} G(-\sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i, M(\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r}_i)x_i)^2), \tag{33}$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

Запишем задачу (33) более подробно

$$\min_{x \in X} G(-\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j). \qquad (34)$$

В задаче Г. Марковица используется свертка типа суммы с весовым коэффициентом $\lambda \geq 0$ при дисперсии, который показывает отношение инвестора к риску. Рассмотрение дисперсии в качестве функции риска для такого типа свертки удобно в том смысле, что исходная задача сразу представляет собой задачу квадратичного программирования (ЗКП) и не требует дополнительных преобразований для нахождения решения. Мы предлагаем в задаче (34) использовать свертку типа отношения с функцией риска, заданной в метрике l_2, не требующей при этом введения весового коэффициента. Таким образом, минимизация относительного риска портфеля приводит к задаче

$$\min_{x \in X} \frac{(M(\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r}_i)x_i)^2)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i}, \qquad (35)$$

где $X = \{x \mid x_i \geq 0, i = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$

или более подробно

$$\min_{x \in X} \frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i}. \qquad (36)$$

Выбор метрики l_2 для относительной функции риска, во-первых, более естественен, чем l_2^2, так как математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение являются соизмеримыми величинами (одни и те же единицы), и, во-вторых, дает возможность свести задачу (36) к ЗКП, а в конечном счете к системе линейных алгебраических уравнений.

Введем обозначение $z = (\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i)^{-1}$. Тогда задача (36) примет вид

$$\begin{gathered} \min_{x,z} (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} (z x_i)(z x_j))^{1/2}, \\ \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i (z x_i) = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,...,n. \end{gathered} \qquad (37)$$

Далее, приняв $y_i = z x_i$, получаем ЗКП

$$\min_{y \in Y} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} y_i y_j, \qquad (38)$$

где $Y = \{y \mid y_i \geq 0, i = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i y_i = 1\}$.

Функция Лагранжа для задачи (38) есть $L(\bar{y},\lambda)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}y_iy_j+\lambda(1-\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_iy_i)$. Необходимые и достаточные условия экстремума для ненулевых y_i, $i=1,...,n$ приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}y_j-\lambda\bar{r}_i=0,\ i=1,...,n,\quad \sum_{j=1}^{n}\bar{r}_jy_j=1. \tag{39}$$

Если часть переменных принимает нулевое значение, то система (39) становится меньшего порядка. Пусть $y^0=(y_1^0,...,y_n^0)$ – решение системы (39), тогда $x_i^0=\frac{y_i^0}{\sum_{i=1}^{n}y_i^0}$, $i=1,...,n$ – компоненты решения задачи (36).

Пример 3. Имеется три инвестиционных инструмента с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_1=0{,}08$, $\bar{r}_2=0{,}1$ и $\bar{r}_3=0{,}13$, дисперсиями $\sigma_{11}=0{,}1$, $\sigma_{22}=0{,}15$, $\sigma_{33}=0{,}19$ и ковариациями $\sigma_{12}=0{,}01$, $\sigma_{13}=-0{,}02$, $\sigma_{23}=-0{,}03$. Требуется найти оптимальный состав портфеля, доставляющего по возможности наибольшую доходность и имеющего при этом наименьший риск, т.е. нужно решить задачу (36). Решая систему (39), используя при этом функцию Find, имеем следующий результат: оптимальный состав портфеля $x^0=(0{,}348;0{,}304;0{,}348)$, ожидаемая доходность портфеля $\sum_{i=1}^{3}\bar{r}_ix_i^0=0{,}103$, риск портфеля $(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}x_i^0x_j^0)^{1/2}=0{,}2$.

Важным моментом при решении задачи минимизации риска портфеля имеет диверсификация, т.е. инвестирование средств в разные бумаги. Чем больше n, тем портфель более застрахован от нежелательных колебаний доходностей ценных бумаг.

Инвестор, желая еще больше избегать риска, может вкладывать часть средств в безрисковый актив. Обозначим доходность по безрисковому активу r_0, а долю средств, инвестируемых в безрисковый актив, через x_0. Тогда величину риска портфеля следует соотносить с доходностью рисковой и безрисковой частей портфеля

$$\min_{x\in X}G(-\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i-r_0x_0,\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j), \tag{40}$$

где $X=\{x\,|\,x_i\geq 0, i=0,...,n,\sum_{i=0}^{n}x_i=1\}$.

$$\min_{x\in X}\frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_ix_i+r_0x_0}. \tag{41}$$

Если инвестору необходимо достигнуть определенного уровня доходности портфеля r_p, то вместо задачи (33) можно рассмотреть следующую задачу:

$$\min_{x\in X} M(\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r}_i)x_i)^2,$$
$$X=\{x\,|\,x_i\ge 0, i=0,...,n, \sum_{i=0}^{n}x_i=1, \sum_{i=0}^{n}\bar{r}_i x_i \ge r_p\}, \tag{42}$$

а вместо задачи (35) можно рассмотреть задачу вида (41), где в знаменателе будет выражение $\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0 - r_p$. Все эти задачи сводятся к ЗКП и в конечном счете к системе линейных алгебраических уравнений.

Пример 4. Рассмотрим три инвестиционных инструмента с характеристиками, представленными в примере 3, и уровнем требуемой доходности портфеля $r_p = 0{,}09$. Для решения задачи (42) будем использовать функцию Maximize . Получаем результат: оптимальный состав портфеля $x^0 = (0{,}417; 0{,}289; 0{,}294)$, ожидаемая доходность портфеля $\sum_{i=1}^{3}\bar{r}_i x_i^0 = 0{,}1$, риск портфеля $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}x_i^0 x_j^0 = 0{,}039$. Использование функции риска, заданной в метрике l_2^2, в задаче (42) с заданным уровнем доходности $r_p = 0{,}09$ приводит к тому, что ожидаемая доходность оптимального портфеля в задаче (42) снизилась примерно на 3 %, а риск – на 1,5 % по сравнению с решением задачи управления риском из примера 3. Для сравнения рисков нужно извлечь корень квадратный из величины $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}x_i^0 x_j^0 = 0{,}039$ в примере 4.

Таким образом, при управлении портфелем ценных бумаг модель, использующая функцию риска в метрике l_2 и свертку типа отношения, может оказаться более привлекательной для инвестора, избегающего риска, по сравнению с моделью (42) при некоторых r_p.

В задачах фондового инвестирования предлагается также рассматривать вероятностные функции риска. Задачи минимизации риска при этом могут быть сформулированы следующим образом:

$$\min_{x\in X} P(\sum_{i=1}^{n}r_i x_i + r_0 x_0 < r_p),$$
$$X=\{x\,|\,x_i\ge 0, i=0,...,n, \sum_{i=0}^{n}x_i=1\}. \tag{43}$$

$$\max_{x}\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0$$
$$P(\sum_{i=1}^{n}r_i x_i < \sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i) \le \alpha, \quad x_i \ge 0, i=0,...,n, \sum_{i=0}^{n}x_i=1. \tag{44}$$

$$\max_{x}\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0$$
$$P(\sum_{i=1}^{n}\bar{r}_i x_i + r_0 x_0 - \sum_{i=0}^{n}r_i x_i \ge \delta) \le \beta, \quad \delta > 0,\ x_i \ge 0, i=0,...,n, \sum_{i=0}^{n}x_i=1. \tag{45}$$

$$\max_x r_0 x_0$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_0 x_0) \le \gamma, \quad x_i \ge 0, i = 0,...,n, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1. \tag{46}$$

$$\min_{x\in X} P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p),$$

$$X = \{x \mid x_i \ge 0, i = 1,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}. \tag{47}$$

На примере задачи (47) продемонстрируем механизм сведения таких задач к ЗКП. Пусть случайная величина $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ имеет нормальный закон распределения, т.е. $P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$, где $a = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i$ – математическое ожидание, $\sigma = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)^{1/2}$ – среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Для вычисления величины $P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p)$ в данном случае удобно воспользоваться функцией Лапласа: $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$. Итак, имеем равенство

$$P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_p} e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{r_p - a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz,$$

где $z = \frac{t-a}{\sigma}$ или $t = a + \sigma z$.

Далее имеем

$$P(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i < r_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{r_p - a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi(0) - \Phi(\frac{a - r_p}{\sigma}) = \frac{1}{2} - \Phi(\frac{a - r_p}{\sigma}).$$

Тогда задача эквивалентная (47) имеет вид

$$\frac{\sigma}{a - r_p} \to \min. \tag{48}$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем

$$\min_x \frac{(\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i x_i - r_p}, \tag{49}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0, i = 1,...,n.$$

Далее, аналогично задаче (36), задача (49) сводится к ЗКП и в конечном счете к системе линейных алгебраических уравнений.

Заключение

Таким образом, в работе представлены задачи управления риском при стратегическом и фондовом инвестировании, в которых использовались линейная свертка критериев эффективности и риска и свертка этих критериев типа отношения. Целесообразность применения подхода к управлению риском с использованием тех или иных функций риска в значительной степени зависит от специфики решаемой прикладной задачи и характера возможных рисков в изучаемой системе. Показано, что все представленные задачи сводятся к задаче математического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, В. А. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике / В. А. Акимов, В. В. Лесных, Н. Н. Радаев. – М. : Деловой экспресс, 2004. – 352 с.
2. Бурков, В. Н. Как управлять проектами / В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. – М. : НПО «СИНТЕГ»: ИЧП «Гео», 1997. – 188 с.
3. Владимиров, В. А. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика / В. А. Владимиров, Ю. Л. Воробьев, С. С. Салов [и др.]. – М. : Наука, 2000. – 429 с.
4. Горелик, В. А. Основы исследования операций : учеб. пособие / В. А. Горелик, Т. П. Фомина. – М. : Московский пед. гос. ун-т, 2004. – 248 с.
5. Милосердов, А. А. Рыночные риски: формализация, моделирование, оценка качества моделей / А. А. Милосердов, Е. Б. Герасимова. – Тамбов : Изд-во Тамбовского гос. техн. ун-та, 2004. – 116 с.
6. Соловьев, В. И. Математические методы управления рисками : учеб. пособие / В. И. Соловьев. – М. : ГУУ, 2003. – 100 с.
7. Шарп, У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2004. – XII, 1028 с.
8. Konno, H, Yamazaki, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization models and its application to Tokyo stock market, Management Scinces, 1991, 37 – Pp. 519-531.
9. Markowitz, H.M. Portfolio selection, Journal of Finance, 1952, 7 – pp. 77-91.
10. Cai X.Q., Teo K.L., Yang X.Q., Zhou X.Y. Portfolio optimization with l_∞ risk measure, 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996 – Pp. 3682-3687.