

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
MATHEMATICS AND MECHANICS

Тарануха Н. А., Петрова А. Н., Любушкина Н. Н.
N.A. Taranukha, A.N. Petrova, N.N. Lyubishkina

**КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ
ИЗ НЕСТАНДАРТИЗИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА**

**VIBRATIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH LARGE DEFORMATIONS
MADE OF NON-STANDARD MATERIAL**



Тарануха Николай Алексеевич – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Кораблестроение» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: taranukha@knastu.ru.
Mr. Nikolay A. Taranukha – Doctor of Engineering, Professor, Head of the Department of Shipbuilding Technology, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur), taranukha@knastu.ru



Петрова Анна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры МОП ЭВМ Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: petrovaan2006@yandex.ru.
Ms. Anna N. Petrova – PhD in Engineering, Associate Professor at the Department of Computer Software and Computing, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur), petrovaan2006@yandex.ru



Любушкина Надежда Николаевна – доцент кафедры «Промышленная электроника» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: nadka_lub@mail.ru.
Ms. Nadezhda N. Lyubushkina – Associate Professor at the Department of Industrial electronics, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur), nadka_lub@mail.ru

Аннотация. В статье описывается методика расчета и оценки колебаний динамических систем с большими деформациями из нестандартизированного материала. Выполнены исследования зависимости жесткости от геометрических параметров образца. Методика расчета апробирована на ряде задач.

Summary. The article describes the method of calculation and evaluation of vibrations of dynamical systems with large deformations of non-standard material. The investigation of stiffness depending on the geometric parameters of the sample is carried out. The method of calculation was tested on a number of problems.

Ключевые слова: колебания, большие деформации, математическая модель.

Keywords: vibrations, large deformations, mathematical model

УДК 539.3:534.1:517.958

Введение

Выполнить оценку динамических характеристик колеблющейся системы – это задача, требующая нетрадиционного решения, особенно при использовании современных материалов со сложными физико-механическими свойствами.

Параметры, определяющие колебательный процесс (коэффициент затухания, амплитуда, фаза колебаний), зависят от круговой частоты, которая, в свою очередь, зависит от коэффициента жесткости элемента упругой связи. Коэффициент жесткости – это функция, определяемая деформационной характеристикой материала, которая при больших деформациях, как правило, нелинейна. В реальных условиях колебания динамических систем следует рассматривать с учетом внутреннего сопротивления [2]. Определить жесткость нестандартизированного материала и логарифмический декремент можно только на основе экспериментальных данных. Таким образом, определение амплитудно-частотных характеристик конструкции из нестандартизированного материала является сложной задачей.

Примером нестандартизированного материала может быть резина. Динамические процессы в стержне из подобного материала нетривиальны. В элементах конструкций из таких материалов могут возникать, в том числе и значительные деформации. Примерами таких конструкций могут являться элементы специальных амортизаторов (типа автофинишеров).

Амплитудно-частотные характеристики динамических систем при больших деформациях зависят от физических характеристик материала и изменяющихся геометрических параметров колеблющейся системы.

В данной работе рассмотрена методика расчета параметров свободных колебаний для динамической системы, допускающей большие деформации (до десятков и сотен процентов). Материал упругой связи динамической системы является нестандартизированным.

Предлагаемая методика заключается в следующем [5]:

- проведение модельного эксперимента для определения статических характеристик нестандартизированного материала (см. рис. 1, *а*). При разработке методики эксперименты проводились для разной длины и формы поперечного сечения образца;
- расчет статических характеристик нестандартизированного материала;
- проведение модельного эксперимента для определения динамических характеристик нестандартизированного материала. Для предложенной методики были разработаны аппаратно-программный комплекс и новое программное обеспечение для проведения экспериментов и выполнения численных расчетов;
- расчет динамических характеристик нестандартизированного материала;
- расчет колебательного процесса реальной динамической конструкции с одной степенью свободы из того же материала, что в модельном эксперименте, на основе рассчитанных физических характеристик (например, как на рис. 1, *б*). Для расчета колебательного процесса предлагается применить линейную схему расчета с использованием итерационной процедуры для учета нелинейных свойств материала.

Поясним предлагаемую методику более детально.

1 Проведение модельного эксперимента для определения статических характеристик нестандартизированного материала

Для проведения физического эксперимента выбран монолитный резиновый жгут, длина рабочей части которого, как минимум, в 15 раз больше относительного размера поперечного сечения.

Образец жестко закреплен с одной стороны. Усилие создается за счет силы, действующей на образец со стороны, противоположной закрепленной. Сила P равна весу прикрепленного груза (см. рис. 1, *а*). Исключен перекосяк, без дополнительного изгиба создана центральная передача усилий. Изменение груза осуществляется вручную.

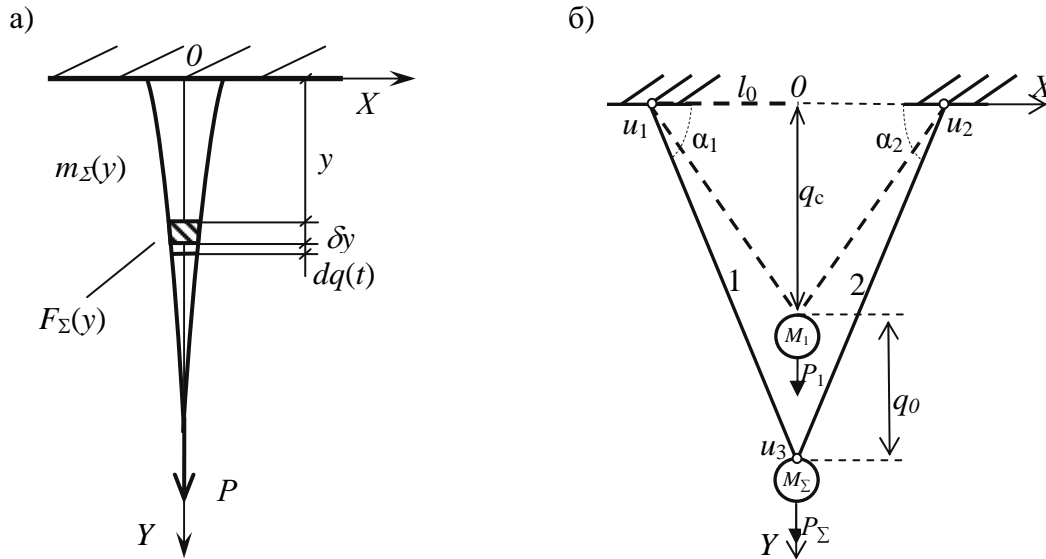


Рис. 1. Схема нагружения: а – в модельном эксперименте;
б – в реальной конструкции

Для проверки правильности теории эксперименты проводились многократно на нескольких образцах, в том числе с разными характеристиками. Величина деформации доводилась до нескольких сотен процентов от начальной.

Анализ деформированного состояния основан только на геометрических соотношениях. В качестве исследуемых физических моделей использовались резиновые жгуты, которые имеют заданную длину и поперечное сечение: образец 1 (см. рис. 2, а) круглого поперечного сечения, образец 2 (см. рис. 2, б) квадратного поперечного сечения, образец 3 (см. рис. 2, в) прямоугольного поперечного сечения. Далее по статье значение индекса определяет принадлежность образца.

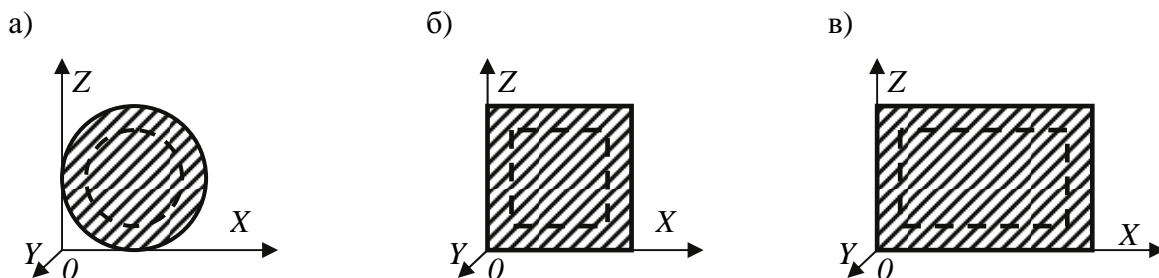


Рис. 2. Формы поперечных сечений: а – образец круглого сечения;
б – образец квадратного сечения; в – образец прямоугольного сечения

В продольном направлении стержень удлиняется на величину

$$\Delta l = \Delta y,$$

где Δy – перемещение конечной точки стержня вдоль оси OY после деформации.

При растяжении происходит утонение и изменение размеров по соответствующим осям: Δx , Δz . Пунктиром на рис. 2 обозначены поперечные сечения после деформации. Для увеличения точности и уменьшения погрешности делались многократные измерения геометрических размеров стержня. Экспериментальные данные нормировались.

2 Расчет статических характеристик нестандартизированного материала

По экспериментальным данным определялись статические характеристики нестандартизированного материала, главные из которых модуль упругости материала и коэффициент жесткости. На рис. 3 показано сравнение деформационных характеристик трех образцов.

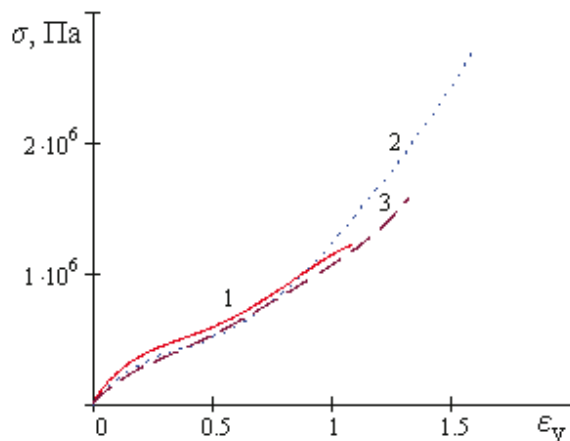


Рис. 3. Деформационные характеристики

Из графика на рис. 3 видно, что материал является нелинейно-упругим, и модуль упругости материала $E_{np}(\Delta l)$ – величина не постоянная, а функция. В ходе исследования была выведена и апробирована математическая модель определения статических характеристик нестандартизированного материала, допускающего большие деформации,

$$E_{np}(\Delta l) = \frac{(\sigma_y(\varepsilon_y(\Delta l)))}{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)} = \frac{\left(\sigma_y \left(\frac{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}{1 - 2\mu(\Delta l)} \right) \right)}{\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)}. \quad (1)$$

Была исследована зависимость функции изменения модуля упругости от разных исходных длин образцов (l_0). Сделан вывод, что $E_{np}(\Delta l)$ не зависит от исходных длин образцов.

Была исследована зависимость функции изменения модуля упругости от формы поперечного сечения образца (см. рис. 4).

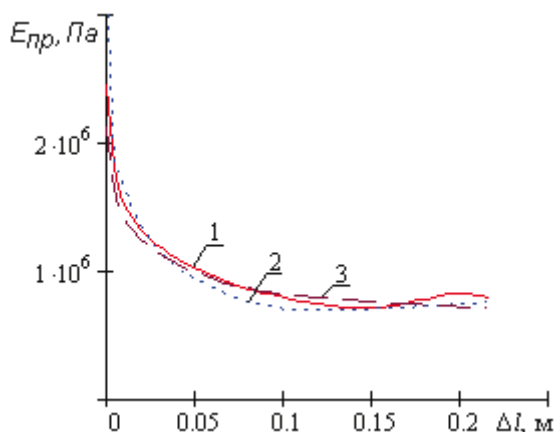


Рис. 4. График изменения приведенного модуля упругости

Среднеквадратичное отклонение зависимостей $E_{np}(\Delta l)$ друг от друга для различных форм поперечного сечения образцов в пределах 0,2 %, в отличие от расчета модуля упругости по другим методикам. Таким образом, можно принять одну из зависимостей, полученных в модельном эксперименте, для дальнейших расчетов реальных конструкций.

Функция изменения коэффициента жесткости определялась с учетом вывода объемного модуля упругости (1).

$$C_{np}(\Delta l) = \frac{E_{np}(\Delta l) \cdot (\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)) \cdot F(\Delta l)}{\Delta l}, \quad (2)$$

где $F(\Delta l)$ – площадь поперечного сечения в текущий момент нагружения.

Функция изменения коэффициента жесткости была исследована в зависимости от разных длин образцов. Доказано, что можно найти коэффициент жесткости для образца любой длины по результатам исследования одного опытного образца.

Функция изменения коэффициента жесткости была исследована в зависимости от формы поперечного сечения образца. Максимальная погрешность определения коэффициента жесткости, отнесенного к площади поперечного сечения (C^1), рассчитанного по приведенному модулю упругости (2), составляет 7,7 %, что говорит о близости к экспериментальному распределению. Если выполнить аналогичные вычисления C^1 через касательный модуль упругости, то максимальная относительная погрешность составит 14,9 %, что недопустимо.

3 Проведение модельного эксперимента для определения динамических характеристик нестандартизированного материала

Экспериментальная установка – это аппаратно-программный комплекс (АПК), позволяющий получать зависимости для определения динамических характеристик материала (логарифмический декремент затухания, коэффициент затухания) и параметров образцов (амплитуда колебания, период колебания) для расчета физически нелинейной математической модели колебания системы с одной степенью свободы при больших деформациях. Комплекс состоит из аппаратной части и программно-информационного обеспечения (ПИО) [1, 4].

Данная установка апробирована на серии экспериментов и дает хорошие результаты. По сравнению с другими программами, работающими с драйверами мыши, программа имеет преимущество – запись отсчетов производится без ограничений количества таковых, рабочая зона не ограничена разрешением и размером монитора. Данные результаты можно использовать для дальнейших исследований. На программу «Колебания» получено свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2008610137, зарегистрированное в Реестре программ для ЭВМ 9 января 2008 г.

В программе за нулевой отсчет принято растянутое положение измерителя, поэтому установившееся значение находится в области положительных значений длин. При расчетах за нулевое значение принята точка закрепления образца в неподвижной опоре.

4 Расчет динамических характеристик нестандартизированного материала

В ПИО заложен алгоритм, предложенный авторами, для расчета динамических характеристик: частоты (λ), коэффициента затухания (b), амплитуды (A), сдвига фазы (ϕ) по зависимости перемещения (q) во времени (t), представленный в табличном виде [1, 3]. Данный алгоритм реализован в программе «Динамические свойства материалов», зарегистрированной в Реестре программ для ЭВМ 19 ноября 2008 г. Свидетельство об официальной регистрации программ для ЭВМ № 2008615530.

5 Расчет реальной динамической конструкции с одной степенью свободы из того же материала, что в модельном эксперименте, на основе рассчитанных физических характеристик

Ввиду того, что при большой деформации циклическая частота и коэффициент затухания зависят от жесткости системы, для больших деформаций дифференциальное уравнение определяем в виде

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{\beta}{M^c} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{C_{\Sigma}(\Delta l)}{M^c} \cdot q(t) = 0, \quad (3)$$

где β – коэффициент сопротивления среды (внутренней и внешней); M^c – суммарная масса, сосредоточенная в узле конструкции; $C_{\Sigma}(\Delta l)$ – суммарный коэффициент жесткости упругих связей из нестандартизированного материала.

Данное дифференциальное уравнение является нелинейным относительно жесткости с переменными во времени коэффициентами.

Циклическая частота незатухающих колебаний не зависит от амплитуды колебания, она зависит от жесткости системы (2), поэтому круговую частоту для больших деформаций будем определять следующим образом:

$$\lambda(C_{\Sigma}(\Delta l)) = \sqrt{\frac{C_{\Sigma}(\Delta l)}{M^c}}.$$

С учетом зависимости, определяющей циклическую частоту колебаний, коэффициент затухания будет определяться выражением

$$b(C_{\Sigma}(\Delta l)) = \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi^2 + \gamma^2}} \cdot \lambda(C_{\Sigma}(\Delta l)). \quad (4)$$

Циклическая частота затухающих колебаний будет определяться выражением

$$\lambda_1(C_{\Sigma}(\Delta l)) = \lambda(C_{\Sigma}(\Delta l)) \cdot \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\sqrt{4\pi^2 + \gamma^2}}}. \quad (5)$$

Амплитуда и фаза колебания – это функции, зависящие от жесткости материала упругой связи, поэтому определяются

$$A(C_{\Sigma}(\Delta l)) = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\nu_0 + b(C_{\Sigma}(\Delta l)) \cdot q_0)^2}{\lambda_1(C_{\Sigma}(\Delta l))^2}}; \quad (6)$$

$$\phi(C_{\Sigma}(\Delta l)) = \arctg\left(\frac{q_0^2 + \lambda_1(C_{\Sigma}(\Delta l))}{\nu_0 + b(C_{\Sigma}(\Delta l)) \cdot q_0}\right).$$

Решение дифференциального уравнения квазигармонических колебаний (3) для больших деформаций предлагается в виде [1, 3]

$$q(t, C_{\Sigma}(\Delta l)) = A(C_{\Sigma}(\Delta l)) \cdot e^{-b(C_{\Sigma}(\Delta l))t} \cdot \sin(\lambda_1(C_{\Sigma}(\Delta l)) \cdot t + \phi(C_{\Sigma}(\Delta l))). \quad (7)$$

Начальные условия для задачи о колебаниях системы с большими деформациями будут определяться в виде

$$q(t, C_{\Sigma}(\Delta l)) = q_0; \quad \dot{q}(t, C_{\Sigma}(\Delta l)) = \dot{q}_0'. \quad (8)$$

Главной особенностью закона колебания является то, что частота, коэффициент затухания, амплитуда и начальная фаза колебания зависят от существующих в конкретный мо-

мент времени в колеблющейся системе удлинения и фактической жесткости системы. Данное обстоятельство стало главным при выполнении итерационной процедуры расчета.

Решение (7) нелинейного дифференциального уравнения (3) было получено с учетом независимости функций, входящих в данное уравнение, поэтому оно требует корректировки учета нелинейности входящих функций. Для этого предлагается следующий численный алгоритм поиска решения.

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек

$$t_i = t_0 + i \cdot h.$$

Поскольку $\Delta l_i = f(q_i, q_0)$, значения q_i могут быть определены следующим образом:

$$q_{i+1} = A(C_\Sigma(\Delta l_i)) \cdot e^{-b(C_\Sigma(\Delta l_i))t} \cdot \sin(\lambda_1(C_\Sigma(\Delta l_i)) \cdot t + \phi(C_\Sigma(\Delta l_i))).$$

В данном алгоритме предлагается для нахождения последующего значения q_{i+1} учитывать истинное значение жесткости, соответствующее действительному удлинению.

Общее решение $q(t)$ уравнения (3) для динамической системы ищем в виде суммы двух составляющих: динамического $q_d(t)$, описываемого уравнением (7), и смещения q_c от действия статического нагружения [3]

$$q(t, C_\Sigma(\Delta l)) = q_d(t, C_\Sigma(\Delta l)) + q_c(t, C_\Sigma(\Delta l)). \quad (8)$$

Циклическую частоту затухающих колебаний определяем выражением (5), коэффициент затухания (4), амплитуду и фазу выражениями (6), учитывающими большие деформации. Значения функций $\lambda_1(C_\Sigma(\Delta l_i))$, $b(C_\Sigma(\Delta l_i))$, $A(C_\Sigma(\Delta l_i))$ и $\phi(C_\Sigma(\Delta l_i))$ уточняются на каждом шаге итерации для соответствующего удлинения Δl_i и фактической жесткости $C_\Sigma(\Delta l_i)$.

Полученное таким образом решение является численным, параметрически зависимым от коэффициента жесткости системы $C_\Sigma(\Delta l)$.

Для подтверждения правильности предложенной методики был проведен эксперимент для рассчитываемой конструкции (см. рис. 1, б). На рис. 5 приведены графики колебательных процессов.

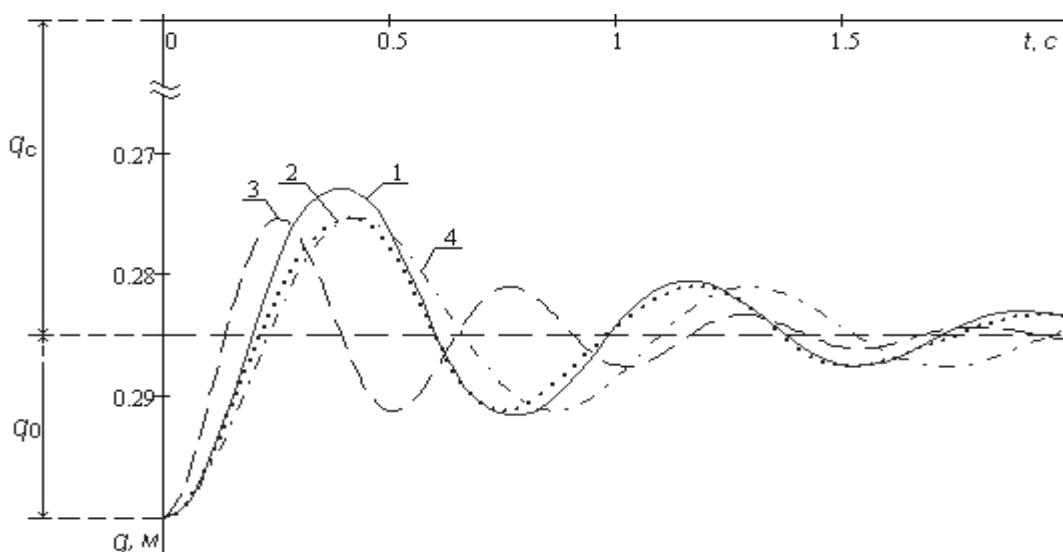


Рис. 5. Графики колебаний: 1 – эксперимент; 2 – расчет по предлагаемой математической модели итерационно с пересчетом жесткости; 3 – расчет без пересчета жесткости; 4 – решение уравнения (3) методом Рунге-Кутты

Тарануха Н. А., Петрова А. Н., Любушкина Н. Н.
КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ
ИЗ НЕСТАНДАРТИЗИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

Из рис. 5 видно, что предложенная математическая модель оценки колебаний дает вполне удовлетворительные результаты, среднее значение среднеквадратичного отклонения составляет 0,004 % (методом Рунге-Кутты – 1,6 %).

Заключение

Модели, предложенные в данной работе, предназначены для оценки колебаний динамических систем с одной степенью свободы, учитывающих большие деформации, позволяют учитывать физические нелинейности материала конструкции. Модели могут найти широкое применение в практических расчетах. Разработанный программный комплекс может использоваться в научных исследованиях свойств нестандартизированных материалов, задачах колебаний.

Методика расчета и оценки колебаний динамической системы пригодна для расчета конструкций с элементами упругой связи различной длины, площади и формы поперечного сечения, имея данные только модельного эксперимента. Итерационная процедура расчета колебаний дает результаты, сопоставимые с известными численными методами, позволяя при этом определить не только значения перемещения, но и частоты, амплитуды и коэффициента затухания.

Предложенные математическая и численные модели, АПК и методика позволяют удовлетворительно оценивать колебания динамических систем с большими деформациями из нестандартизированных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любушкина, Н. Н. Программно-информационное обеспечение задачи о колебаниях стержня с большими деформациями / Н. Н. Любушкина, А. Н. Петрова, Н. А. Тарануха // Информатика и системы управления. – 2007. – № 2(14). – С. 30-39.
2. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебаний сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления / Н. А. Тарануха, О. В. Журбин. – Владивосток : Дальнаука, 2008. – 253 с.
3. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебательных процессов в стержне с большими деформациями / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КнАГТУ», 2007. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007, 903-В2007.
4. Тарануха, Н. А. Программно-аппаратный комплекс по обработке результатов эксперимента колеблющейся системы / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КнАГТУ», 2007. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007, 902-В2007.
5. Тарануха, Н. А. Механика морских динамических систем с большими деформациями из нестандартизированного материала / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 3.
6. Тарануха, Н. А. Математическая модель шарнирной стержневой системы с большими перемещениями узлов / Н. А. Тарануха, К. В. Жеребко, А. Н. Петрова, М. Р. Петров // Известия вузов. – Строительство. – 2003. – № 3. – С. 12-18.