

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
MATHEMATICS AND MECHANICS

Тарануха Н.А., Петрова А.Н., Любушкина Н.Н.
Taranukha N.A., Petrova A.N., Lyubushkina N.N.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
НЕСТАНДАРТИЗИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА УПРУГОЙ СВЯЗИ
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

**DEFINING STIFFNESS PROPERTIES OF NON-STANDARDIZED ELASTIC CON-
STRAINT MATERIALS IN A DYNAMIC SYSTEM**



Тарануха Николай Алексеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой кораблестроения Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Ленина 27; (4217) 54-30-74. E-mail: taranukha@knastu.ru.

Mr.Nikolay A. Taranukha – Doctor of Engineering, Head of the Shipbuilding Department, Komsomolsk-on-Amur Technical University, e-mail: taranukha@knastu.ru



Петрова Анна Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: petrovaan2006@yandex.ru

Ms.Anna N. Petrova – PhD in Engineering, Assistant Professor, Department of Computer Software and Computing, Komsomolsk-on-Amur Technical University, e-mail: petrovaan2006@yandex.ru



Любушкина Надежда Николаевна – доцент кафедры промышленной электроники Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: nadka_lub@mail.ru

Ms.Nadezhda N. Lyubushkina – Assistant Professor, Department of Industrial Electronics, Komsomolsk-on-Amur Technical University, e-mail: nadka_lub@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся математические модели для определения функций коэффициента жесткости и единичного коэффициента жесткости нелинейно-упругого материала. Исследуется возможность распространения зависимостей, полученных для одного образца, на варианты образцов с другими геометрическими параметрами (длины, площади и формы поперечного сечения).

Summary: The paper proposes a mathematical model for determining the functions of the stiffness ratio and unitary stiffness ratio in a nonlinear elastic material. A possibility is considered to apply the dependences derived for one sample to other samples with other geometric parameters (length, area and cross section shape).

Ключевые слова: жесткость, большие деформации, математическая модель.

Key-words: stiffness, large deformations, mathematical model

УДК 539.3:534.1:517.958

Введение

Основными параметрами, описывающими поведение динамической системы, являются частота и декремент затухания. Как известно, собственная частота (λ) определяется по

формуле $\lambda(C) = \sqrt{\frac{C}{M}}$, где C – суммарная жесткость элементов, сходящихся в узле; M – суммарная масса [2; 3; 5].

Задача, рассматриваемая в данной статье, состоит в определении коэффициента жесткости образца упругой связи нестандартизированного материала динамической системы. Требуется исследовать возможность применимости данных модельного эксперимента для расчетов реальной конструкции со стержнями из того же материала, но с другими геометрическими параметрами (длина, площадь и форма поперечного сечения).

В качестве нестандартизированного материала выбрана резина. Ее свойства зависят от количества присадок и параметров вулканизации.

Определение коэффициента жесткости системы

Коэффициент жесткости системы зависит от свойств материала, размеров стержня, деформации. У исследуемого материала, допускающего большие деформации, зависимость $\sigma(\varepsilon)$ является нелинейной функцией деформации так же, как и функция $P(\Delta l)$, поэтому и жесткостная характеристика будет нелинейная.

Теоретический коэффициент жесткости согласно закону Гука определяется по формуле

$$C^{теор} = \frac{E \cdot F}{l_0},$$

где E – модуль упругости материала; F – площадь поперечного сечения образца; l_0 – начальная длина образца.

Коэффициент жесткости системы $C(\Delta l)$ в общем виде определяется некоторой нелинейной функцией. По экспериментальным данным он определяется из отношения:

$$C_i^{экс} = \frac{P_i}{l_i - l_0} = \frac{P_i}{\Delta l_i}. \quad (1)$$

В ходе исследования материалов, допускающих большие деформации и, как следствие, изменение объема, была получена нелинейная деформационная характеристика. По полученной зависимости определено выражение обобщенного закона деформирования для расчета функции модуля упругости. Модуль упругости назван приведенным E_{np} . Поскольку он получен для обобщенного закона деформирования, то это обстоятельство следует учитывать при определении коэффициента жесткости.

Введем понятие единичного коэффициента жесткости:

$$C^1(\Delta l) = \frac{C(\Delta l)}{F(\Delta l)}. \quad (2)$$

С учетом (1) единичный коэффициент жесткости имеет вид:

$$C^1(\Delta l) = \frac{P_i}{\Delta l \cdot F(\Delta l)} = \frac{\sigma(\varepsilon(\Delta l))}{\Delta l},$$

а с учетом определения E_{np} , он определяется как:

$$C^1(\Delta l) = \frac{E_{np}(\Delta l) \cdot (\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l))}{\Delta l}. \quad (3)$$

Таким образом, коэффициент жесткости равен:

$$C_{np}(\Delta l) = \frac{E_{np}(\Delta l) \cdot (\varepsilon_x(\Delta l) + \varepsilon_y(\Delta l) + \varepsilon_z(\Delta l)) \cdot F(\Delta l)}{\Delta l}. \quad (4)$$

На рис. 1 построены зависимости коэффициентов жесткости от удлинения, определенные экспериментально по (1) и теоретически по (4). Графики изменения коэффициента жесткости показаны для образцов разных форм поперечных сечений: 1 – круглой; 2 – квадратной; 3 – прямоугольной. Экспериментальные зависимости обозначены соответственно: 1э, 2э, 3э.

Графики изменения коэффициентов жесткости подтверждают гипотезу, что коэффициент жесткости величина не постоянная. Коэффициент жесткости $C_{пр}$, вычисленный через приведенный модуль деформации, имеет отклонение от экспериментального 1,3 %.

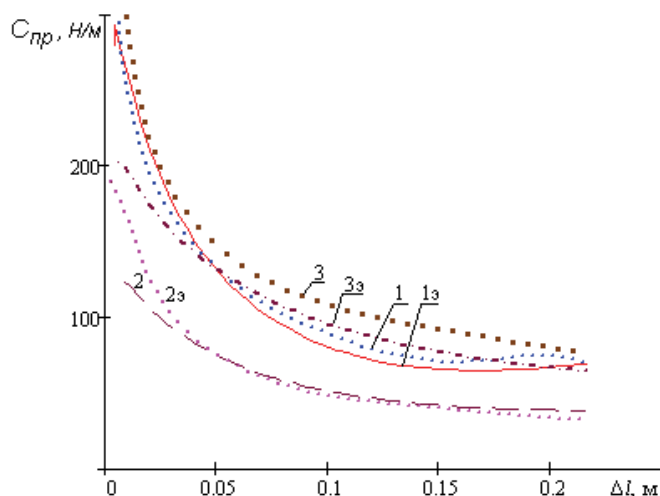


Рис. 1. Коэффициенты жесткости, вычисленные по приведенному модулю деформации

Модели коэффициента жесткости упругой связи будут использованы в дальнейших расчетах колебаний динамических систем с большими деформациями. Для того чтобы определить, как коэффициент жесткости зависит от геометрии образца (длины, площади и формы поперечного сечения), требуется провести экспериментальное исследование.

Исследование коэффициента жесткости материала упругой связи в зависимости от длины образца

На рис. 2, а показана характеристика удлинения $P(\Delta l)$ 10 образцов (при постоянной форме поперечного сечения). Длина образцов менялась от 0,05 до 0,5 м с шагом 0,05 м.

По характеристике удлинения построена деформационная характеристика (см. рис. 2, б).

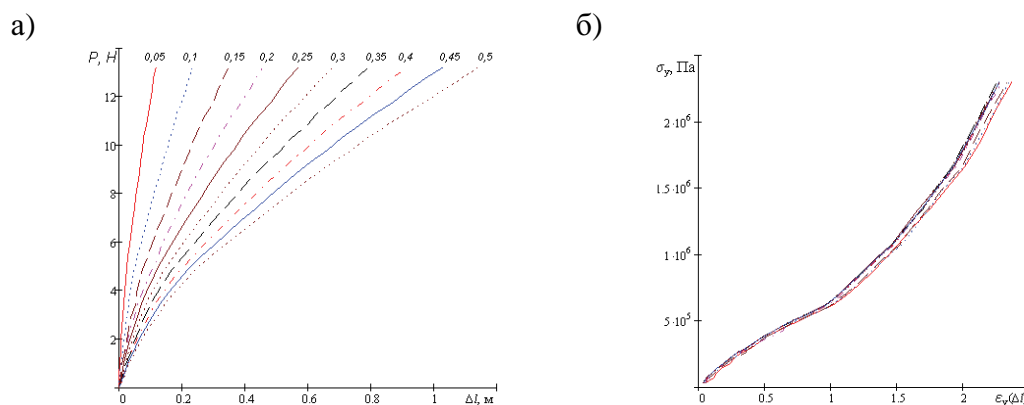


Рис. 2. Характеристики материала в зависимости от длины образца:
 а – удлинение образцов в зависимости от величины приложенной силы;
 б – деформационная характеристика

Зависимость напряжения от деформации для 10 образцов имеет общий характер. Коэффициентом пропорциональности является один модуль упругости. По известным значениям удлинения для каждого образца по (1) определены экспериментальные коэффициенты жесткости. Графики показаны на рис. 3, а.

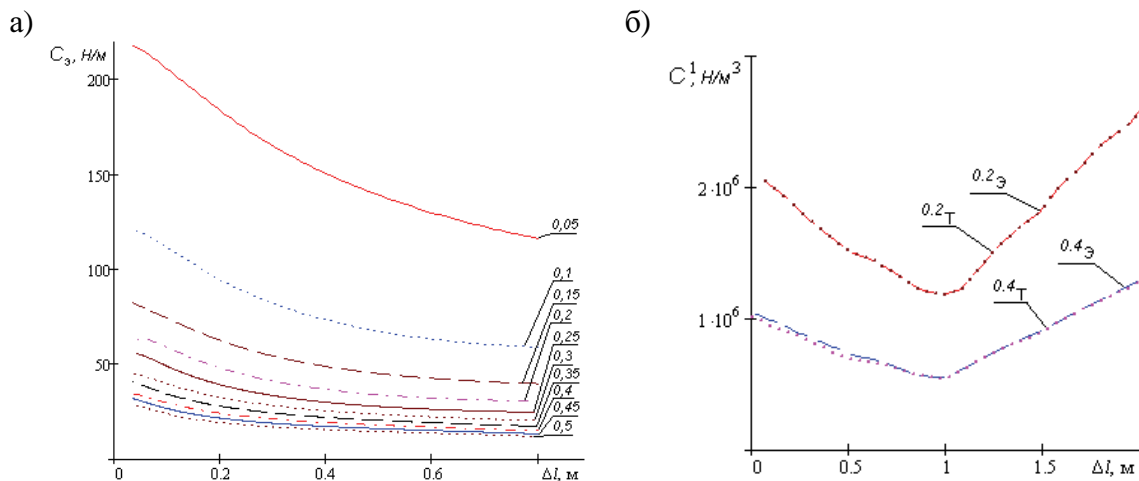


Рис. 3. Исследование коэффициента жесткости в зависимости от длины образца: *а* – экспериментальный коэффициент жесткости; *б* – единичный коэффициент жесткости

По графикам видно, что с увеличением длины образца коэффициент жесткости уменьшается, образец теряет свою жесткость.

Единичный коэффициент жесткости $C^1(\Delta l)$ по экспериментальным данным определен по формуле

$$C^1 = \frac{P}{\Delta l \cdot F},$$

теоретический единичный коэффициент жесткости вычислен по (3).

При этом для нахождения теоретического единичного коэффициента жесткости всех образцов использован общий приведенный модуль упругости, найденный для образца длиной 0,2 м. На рис. 3, б построены графики экспериментального и теоретического единичного коэффициентов жесткости, вычисленного по приведенному модулю упругости (3), для двух образцов длиной 0,2 и 0,4 м. Пунктиром на рис. 3, б показаны графики единичного коэффициента жесткости, найденные по экспериментальным данным, теоретические графики приведены точками.

Таким образом, найти коэффициент жесткости для образца любой длины можно по результатам исследования одного опытного образца.

Исследование коэффициента жесткости материала упругой связи в зависимости от формы поперечного сечения образца

Проведены исследования образцов трех форм поперечного сечения: круглого, квадратного и прямоугольного с соотношением сторон 1×2 . Для данных образцов выполнены эксперименты на растяжение, определены коэффициенты жесткости.

Коэффициент формы поперечного сечения определяется выражением:

$$K_\phi = \frac{F}{S},$$

где F – площадь поперечного сечения; S – периметр поперечного сечения.

Если $F = 1 \text{ м}^2$, то коэффициент формы единичного поперечного сечения определяется по формуле

$$K_{\phi} = \frac{1}{S}.$$

Данный коэффициент уникальным образом определяет форму образца. Необходимо определить коэффициент формы для образцов различных форм поперечного сечения (см. рис. 4).

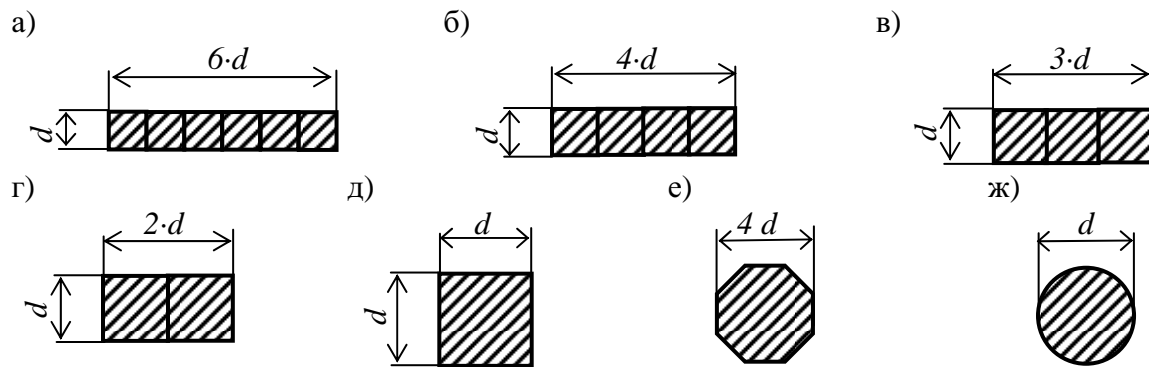


Рис. 4. Виды поперечных сечений образцов

Размер d находится из условия, что площади всех образцов равны 1 м^2 . Значения коэффициентов приведены в табл. 1. Круглое поперечное сечение имеет самый большой коэффициент формы, т.к. данная форма самая оптимальная. Существуют коэффициенты формы со значениями $K_{\phi} < 0,175$ м, но их нельзя относить к стержням. Стержневые элементы имеют коэффициенты формы в диапазоне $0,236 - 0,282$ м.

Таблица 1

Площадь	d , м	Периметр	Значение коэффициента формы, м	
$F_{1 \times 6} = 6 \cdot d^2$	0,408	$S_{1 \times 6} = 14 \cdot d$	$K_{\phi.1 \times 6} = \frac{3}{7} d$	0,175
$F_{1 \times 4} = 4 \cdot d^2$	0,5	$S_{1 \times 4} = 10 \cdot d$	$K_{\phi.1 \times 4} = \frac{2}{5} d$	0,2
$F_{1 \times 3} = 3 \cdot d^2$	0,577	$S_{1 \times 3} = 8 \cdot d$	$K_{\phi.1 \times 3} = \frac{3}{8} d$	0,217
$F_{1 \times 2} = 2 \cdot d^2$	0,707	$S_{1 \times 2} = 6 \cdot d$	$K_{\phi.1 \times 2} = \frac{1}{3} d$	0,236
$F_{1 \times 1} = 1 \cdot d^2$	1	$S_{1 \times 1} = 4 \cdot d$	$K_{\phi.1 \times 1} = \frac{1}{4} d$	0,25
$F_{\text{восьм}} = 14 \cdot d^2$	0,267	$S_{\text{восьм}} = 13,64 \cdot d$	$K_{\phi.\text{восьм}} = \frac{14}{13,64} d$	0,275
$F_{\text{круг}} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$	1,128	$S_{\text{круг}} = \pi \cdot d$	$K_{\phi.\text{круг}} = \frac{1}{4} d$	0,282

Проведены исследования образцов трех форм поперечного сечения: круглого, квадратного и прямоугольного с соотношением сторон 1×2 . Для данных образцов выполнены эксперименты на растяжение, определены коэффициенты жесткости. Коэффициент жестко-

сти зависит от площади поперечного сечения, поэтому коэффициент жесткости, приходящийся на единицу площади C^1 найден по (2).

На рис. 5 построена зависимость единичного коэффициента жесткости (вычисленного через приведенный модуль упругости) от коэффициента формы. Точками обозначены значения единичных коэффициентов, определенные по экспериментальной зависимости. Линиями показаны распределения теоретических единичных коэффициентов жесткости, вычисленных через приведенный модуль для разных относительных деформаций.

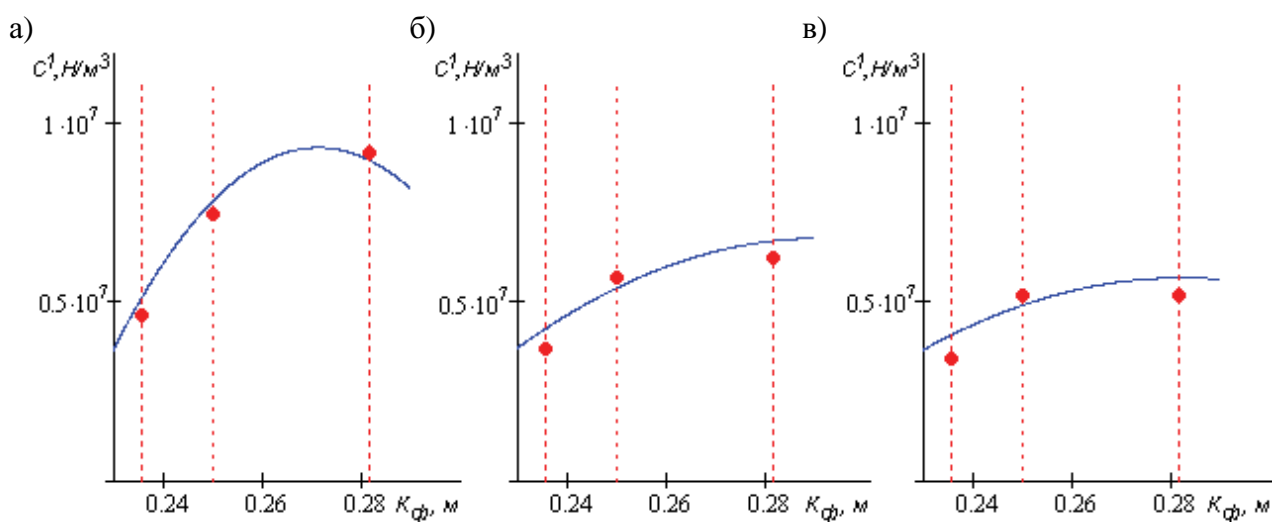


Рис. 5. Зависимость единичного коэффициента жесткости от коэффициента формы: *а* – для 20 % деформации; *б* – для 40 % деформации; *в* – для 60 % деформации: точки – экспериментальные значения; линии – расчетные значения

По рис. 5 видно, что имеется хорошее совпадение между теоретическим и экспериментальным значениями коэффициентов жесткости. В табл. 2 представлены среднеквадратичные погрешности определения единичного коэффициента жесткости через приведенный модуль упругости.

Таблица 2

Относительная деформация, %	20	40	60
Среднеквадратичная погрешность определения, %	3,6	5,9	7,7

Из табл. 2 видно, что максимальная погрешность определения единичного коэффициента жесткости по приведенному модулю упругости составляет 7,7 %, что говорит о близости к экспериментальному распределению. Если выполнить аналогичные вычисления единичного коэффициента жесткости через касательный модуль упругости, то максимальная относительная погрешность составит 14,9 %, что недопустимо.

Решение данной проблемы иным путем дает менее точные результаты, но требует меньшего количества модельных экспериментов.

На рис. 6 приведены графики изменения произведения единичной жесткости на начальную длину $C^1 \cdot l_0$ для образцов с различной формой поперечного сечения.

Так как в пределах линейного закона Гука выполняются соотношения:

$$C^1 \cdot l_0 = \frac{C \cdot l_0}{F} = \frac{P \cdot l_0}{\Delta l \cdot F} = \frac{\sigma \cdot l_0}{\Delta l} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

то для нелинейно-упругого материала графики должны быть близки. Расхождение графиков, приведенных на рис. 6, не превосходит 2 %.

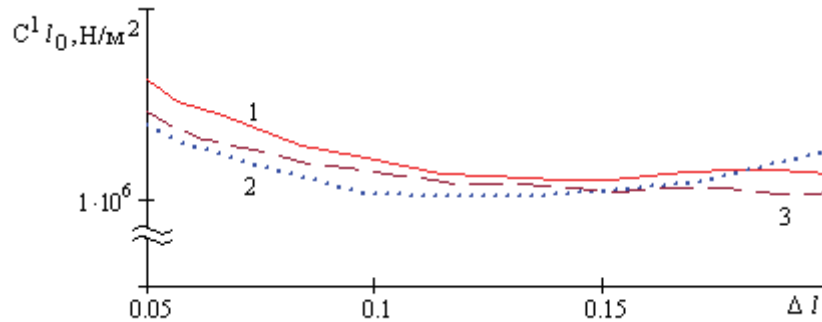


Рис. 6. Графики изменения $C^1 \cdot l_0$ от формы поперечного сечения

На рис. 7 приведены графики зависимости единичного коэффициента жесткости для различных форм и площадей поперечного сечения, различных начальных длин образцов, рассчитанных теоретически по (3), используя экспериментальные данные образца с круглым сечением. Для сравнения приведены экспериментально определенные значения единичного коэффициента жесткости для каждой формы поперечного сечения.

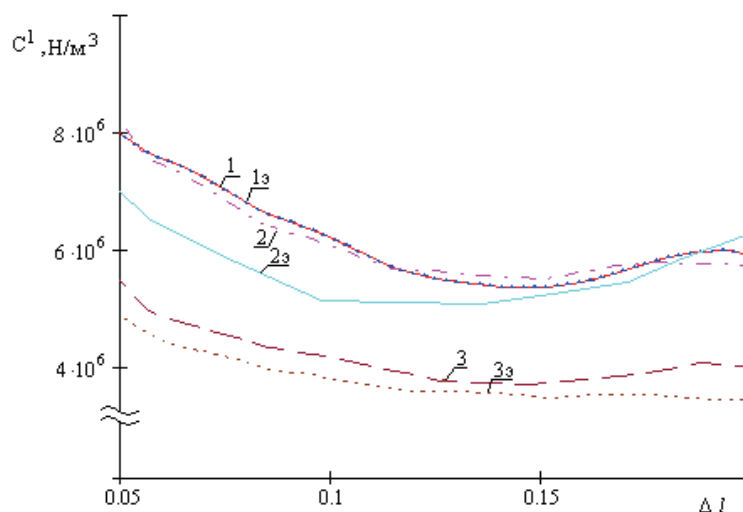


Рис. 7. График изменения единичного коэффициента жесткости от формы поперечного сечения

Из анализа графиков можно сделать вывод, что полученное выражение для расчета единичной жесткости (3) можно использовать для расчета единичной жесткости произвольного стержня (с другой формой и площадью поперечного сечения) по данным модельного эксперимента. Относительная погрешность расчетов составляет 8,9 %.

Итак, в работе приведена формула для расчета коэффициента жесткости (4) и единичного коэффициента жесткости (3). Дальнейшие исследования показали пригодность полученных формул для расчетов колебательных процессов [1; 4; 5].

Заключение

В результате исследований было доказано, что, имея данные модельного эксперимента, можно рассчитать коэффициент жесткости стержня из того же материала, произвольной длины, площади и формы поперечного сечения. Этот вывод был использован при исследовании динамических систем из нестандартизированного материала с большими деформациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любушкина, Н. Н. Программно-информационное обеспечение задачи о колебаниях стержня с большими деформациями / Н. Н. Любушкина, А. Н. Петрова, Н. А. Тарануха // Информатика и системы управления. – 2007. – № 2 (14). – С. 30-39.
2. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебаний сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления / Н. А. Тарануха, О. В. Журбин. – Владивосток: Дальнаука, 2008. 253 с.
3. Тарануха, Н. А. Математическое моделирование колебательных процессов в стержне с большими деформациями / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2007. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007. 903-В2007.
4. Тарануха, Н. А. Программно-аппаратный комплекс по обработке результатов эксперимента колеблющейся системы / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина. – Комсомольск-на-Амуре : ГОУВПО «КНАГТУ», 2007. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 26.09.2007. 902-В2007.
5. Тарануха, Н. А. Механика морских динамических систем с большими деформациями из нестандартизированного материала / Н. А. Тарануха, А. Н. Петрова, Н. Н. Любушкина // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 3.
6. Тарануха, Н. А. Математическая модель шарнирной стержневой системы с большими перемещениями узлов / Н. А. Тарануха, К. В. Жеребко, А. Н. Петрова, М. Р. Петров // Известия вузов. – Строительство. – 2003. – № 3. – С. 12–18.