

Ким К. К., Зазыбина Е. Б.
K. K. Kim, E. B. Zazybina

ПРОЦЕССЫ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МАГНИТОПРОВОД МАГНИТНОГО ПОДШИПНИКА

MAGNETIC FIELD DIFFUSION INTO THE MAGNETIC BEARING'S



Ким Константин Константинович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретические основы электротехники» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I (Россия, Санкт-Петербург); 190031, г. Санкт-Петербург, Московский пр., 9; 89030965770. E-mail: kimkk@inbox.ru.

Mr. Konstantin K. Kim – Dr.habil. of Engineering, Professor, Head of the Department of Electric Engineering Theory, St.-Petersburg State Transport University (Russia, Saint-Petersburg); 9, Moskovsky Ave., Saint-Petersburg, 190031; +7 (903) 0965770. E-mail: kimkk@inbox.ru.



Зазыбина Елена Борисовна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретические основы электротехники» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I (Россия, Санкт-Петербург); 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9; 89602452557. E-mail: ktOE@pgups.edu.

Mr. Elena B. Zazybina – PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Electric Engineering Theory, St.-Petersburg State Transport University (Russia, Saint-Petersburg); 9, Moskovsky Ave., Saint-Petersburg, 190031; +7 (960) 2452557. E-mail:

ktOE@pgups.edu.

Аннотация. Рассматриваются процессы диффузии магнитного поля в магнитопровод магнитного подшипника при резких изменениях токов в обмотках подшипников. Выводится формула для эффективного времени релаксации, связанного с возникновением вихревых токов при скачкообразном изменении поля подшипника.

Summary. We consider the process of magnetic field diffusion into the magnetic core of a magnetic bearing when current steps take place in the bearing's windings. We deduce a formula for the effective relaxation time linked to the emergence of Foucault currents during the bearing field steps.

Ключевые слова: магнитный подшипник, магнитопровод, диффузия, магнитное поле, время релаксации.

Key words: magnetic bearing, magnetic core, magnetic field, relaxation time.

УДК 621.2:62-25

В последнее время в различных областях техники проблеме магнитного удержания тел уделяется все большее внимание [1]. Сущность магнитного удержания состоит в том, что сила тяжести тела и приложенная к нему нагрузка уравнивается силой, создаваемой магнитным полем, в результате чего тело находится в подвешенном состоянии или совершает движение, не контактируя с окружающими телами.

Указанная сила есть результат функционирования так называемых магнитных подшипников, в большинстве случаев, представляющих собой систему из удерживаемого ферромагнитного тела (например, цапфа вращающегося вала) и датчиков его положения, связанных с удерживающими электромагнитами отрицательными обратными связями. Электромагниты могут быть выполнены в виде полюсов кольцеобразного магнитопровода. На

рис. 1 показан фрагмент магнитного подшипника. Таким образом, магнитопровод удерживающего электромагнита и цапфа – основные элементы системы магнитного удержания вала. Их магнитные свойства во многом определяют характеристики системы, поэтому возникла необходимость рассмотреть вопросы, связанные с процессами установления магнитного поля в этих элементах при резких изменениях токов в обмотках электромагнитов. Вероятно, что дополнительная инерционность системы, связанная с диффузией магнитного поля в магнитопроводы и цапфу, может влиять на характеристики устойчивости системы автоматического управления.

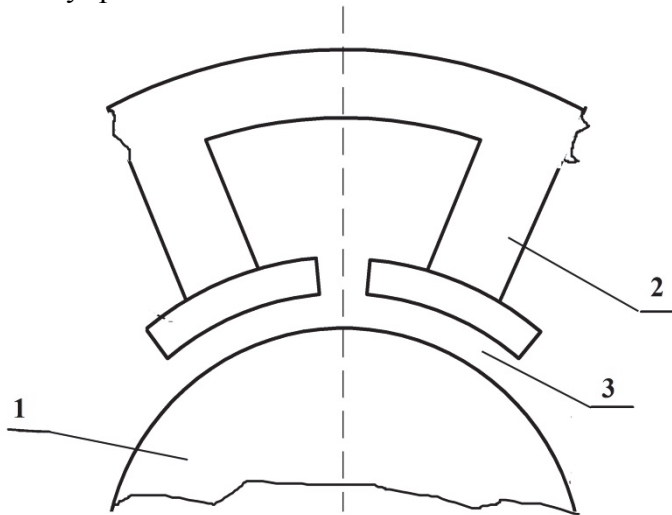


Рис. 1. Фрагмент магнитного подшипника: 1 – цапфа; 2 – полюс; 3 – воздушный зазор

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть в декартовой системе координат x, y, z область $-T < z < 0$ занята ферромагнитным телом с относительной магнитной проницаемостью μ и удельной электропроводностью σ . Для областей $z > 0$ и $z < -T$ указанные параметры имеют значения $\mu = 1$ и $\sigma = 0$, причём в области $z > 0$ располагается источник, создающий магнитное поле, которое считается известным. До момента времени $t = 0$ источник поля не работает, включение источника происходит в момент $t = 0$ с последующим переходным процессом. Для времени $t \rightarrow \infty$ (установившийся режим) поле источника считается известным и

независимым от времени. Задачей является определение поля внутри ферромагнитной плиты ($-T < z < 0$) и над ней ($z > 0$) как функции времени.

Используем уравнение диффузии магнитного поля:

$$\Delta \vec{B} = \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь \vec{B} – вектор индукции, μ_0 – магнитная постоянная, Δ – оператор Лапласа. К уравнению (1) должны быть добавлены граничные условия, выражающие непрерывность нормальной компоненты \vec{B} и тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}$. Если верхними индексами (1) и (2) обозначать граничные значения величин по разные стороны границы (соответственно в областях 1 и 2), то названные граничные условия имеют вид:

$$B_z^{(1)} = B_z^{(2)}, \quad (2)$$

$$H_{x,y}^{(1)} = H_{x,y}^{(2)}. \quad (3)$$

Применим Фурье-преобразование по переменным x, y и Лаплас-преобразование по временной переменной t к уравнению (1). Чтобы избежать усложнения в записи, не будем для изображения вводить новые обозначения. Различие между оригиналом и изображением будет подчёркиваться различием в их аргументах:

$$\vec{B}(\vec{k}, z, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \int_0^{\infty} e^{-pt} \vec{B}(\vec{r}, z, t) dt, \quad (4)$$

здесь введены обозначения: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y$ (\vec{e}_x и \vec{e}_y – орты вдоль направления координатных осей x, y).

Применительно к изображению $\vec{B}(\vec{k}, z, p)$ уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dz^2} = \alpha^2 \vec{B}, \quad \alpha = \sqrt{k^2 + \mu \mu_0 \sigma p} \quad (5)$$

где $k^2 = |\vec{k}|^2$ и для радикала, определяющего α , выбирается (с целью определённости) ветвь, отвечающая положительным α при вещественном положительном значении величины $k^2 + \mu \mu_0 \sigma p$.

Так как основной интерес представляет временная зависимость для полей вне и внутри ферромагнитной пластины, далее не будем в явном виде совершать обратное Фурье-преобразование по пространственной координате \vec{r} . То есть считаем, что источник магнитного поля имеет вид единственной пространственной гармоники $\exp(i\vec{k}\vec{r})$ с заданным волновым вектором \vec{k} . Такой подход не уменьшает общности в постановке задачи, поскольку при известном решении, отвечающем указанному источнику, решение для источника ограниченного размера находится путём вычисления обратного Фурье-преобразования. Однако на практике в этом часто нет необходимости, так как форма реального источника приближенно может учитываться по отдельным гармоникам, вносящим основной вклад в пространственный спектр.

Рассмотрим решение уравнения (5) при граничных условиях (2), (3) для двух смежных полупространств с границей $z = 0$. Пусть в области 1 (при $z > 0$) имеем $\mu = \mu_1$ и $\alpha = \alpha_1$, а в области 2 соответственно $\mu = \mu_2$ и $\sigma = \sigma_2$. Будем считать, что источник, расположенный в области 1, создает на этой границе $z = 0$ -компоненту вектора индукции с единичной амплитудой. В соответствии с уравнением (5) решения для z -компоненты B_z в областях 1 и 2 могут быть представлены соответственно в форме:

$$B_z^1 = \mathcal{R}e^{-\alpha_1 z} + e^{\alpha_1 z}, \quad (6)$$

$$B_z^2 = \mathcal{T}e^{\alpha_2 z}. \quad (7)$$

Второе слагаемое в формуле (6) отвечает наличию источника в области 1. При этом соотношение (6) справедливо при $z < h$, где $z = h$ – координата расположения источника. Величины \mathcal{R} и \mathcal{T} имеют смысл коэффициентов отражения и преломления для z -компоненты B_z и подлежат определению с учетом граничных условий.

Подстановка (6) и (7) в (2) даёт:

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} + 1. \quad (8)$$

Для использования условия (3) выразим x – и y -компоненты вектора \vec{B} через его z -компоненту. Условие $\text{rot}_z \vec{B} = 0$ в Фурье-представлении приводит к соотношению

$$k_x B_y^{(1,2)} = k_y B_x^{(1,2)}. \quad (9)$$

Условие же $\text{div} \vec{B} = 0$ даёт соответственно для областей 1 и 2 при $z = 0$:

$$\begin{cases} ik_x B_x^{(1)} + ik_y B_y^{(1)} - \alpha_1 \mathcal{R} + \alpha_1 = 0, \\ ik_x B_x^{(2)} + ik_y B_y^{(2)} + \alpha_2 \mathcal{T} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Подстановка (9) и (10) позволяет выразить величины $B_x^{(1)}$ и $B_x^{(2)}$ через коэффициенты отражения и преломления:

$$\begin{cases} B_x^{(1)} = \frac{-ik_x \alpha_1 (\mathcal{R} - 1)}{k^2}, \\ B_x^{(2)} = \frac{ik_x \alpha_2 \mathcal{T}}{k^2}. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда соотношение (3) для z -компоненты получает вид:

$$\frac{\alpha_1}{\mu_1} (\mathcal{R} + 1) = \frac{\alpha_2}{\mu} \mathcal{T}. \quad (12)$$

Система уравнений (8) и (12) позволяет найти \mathcal{R} и \mathcal{T} :

$$\mathcal{R} = \frac{\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1}, \quad (13)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2\alpha_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1}. \quad (14)$$

В дальнейшем для того, чтобы подчеркнуть, что магнитное поле проникает из среды 1 в среду 2, величины \mathcal{R} и \mathcal{T} в (13) и (14) будем снабжать индексом 12. Если же считать, что источник находится в среде 2, то в соотношениях (13) и (14) следует поменять местами индексы 1 и 2. Получающиеся при этом величины \mathcal{R} и \mathcal{T} будем отмечать индексом 21.

После проведённого вспомогательного рассмотрения магнитное поле вне и внутри ферромагнитной пластины, имеющей толщину T , может быть рассчитано на основе оптического подхода [2]. При этом «отражённое» поле, то есть полное поле в области 1 при $z = 0$ за вычетом поля источника, даётся рядом:

$$\mathcal{R}_{\text{полн}} = \mathcal{R}_{12} + \mathcal{T}_{12} \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_{21} e^{-2\alpha_2 T} + \mathcal{T}_{12} \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_{21}^3 e^{-4\alpha_2 T} + \dots = \mathcal{R}_{12} + \frac{\mathcal{T}_{12} \mathcal{T}_{21} \mathcal{R}_{21} e^{-2\alpha_2 T}}{1 - \mathcal{R}_{21}^2 e^{-2\alpha_2 T}}.$$

Явное выражение для величины $\mathcal{R}_{\text{полн}}$ через параметры системы находится при учёте соотношений $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu$, $\alpha_1 = k$, $\alpha_2 = \alpha$ и формул (13) и (14):

$$\mathcal{R}_{\text{полн}} = \frac{k\mu - \alpha}{k\mu + \alpha} - \frac{\frac{1}{\alpha} k\mu \frac{k\mu - \alpha}{(k\mu + \alpha)^3} e^{-2\alpha T}}{1 - \left(\frac{k\mu - \alpha}{k\mu + \alpha}\right)^2 e^{-2\alpha T}} = \frac{k\mu - \alpha}{k\mu + \alpha} \times \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{1 - \left(\frac{k\mu - \alpha}{k\mu + \alpha}\right)^2 e^{-2\alpha T}}. \quad (15)$$

Сначала определим временную зависимость «отражённого» поля. Для этого перепишем выражение (15) следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\text{полн}} = \frac{k^2 \mu^2 - \alpha^2}{(k^2 \mu^2 + \alpha^2) + 2k\mu\alpha \operatorname{cth} \alpha T}. \quad (16)$$

Искомая временная зависимость поля определяется теперь из (16) с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$B(t) = \frac{B_0}{2\pi i} \oint_c \frac{e^{pt}}{p} \times \frac{k^2 \mu^2 - \alpha^2}{k^2 \mu^2 + \alpha^2 + 2k\mu\alpha \operatorname{cth} \alpha T} dp. \quad (17)$$

Здесь коэффициент B_0 учитывает реальную величину поля источника на границе $z = 0$, а множитель $\frac{1}{p}$ под интегралом отвечает включению поля в момент $t = 0$. Контур интегрирования c расположен справа от особенностей подынтегрального выражения и может совпадать с прямой $(s - i\infty, s + i\infty)$, $s > 0$. Отметим, что в соответствии с (5) величина α в (17) зависит от переменной интегрирования p .

При анализе выражения (17) выполним замену переменной в соответствии с формулой $p = \frac{k^2(z^2 - 1)}{\mu\mu_0\sigma}$. Для новой переменной z контур интегрирования представляет собой гиперболу с асимптотами $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$, пересекающую вещественную ось в точке $z = 1 + \frac{\mu\mu_0\sigma}{k^2} > 1$. Обозначая этот контур символом Γ , перепишем формулу (17) для переменной z :

$$B(t) = \frac{B_0 e^{-vt}}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z(\mu^2 - z^2) e^{z^2 vt} dz}{(z^2 - 1)(\mu^2 + z^2 + 2\mu z \operatorname{cth} \theta z)}, \quad (18)$$

где

$$v = \frac{k^2}{\mu\mu_0\sigma}, \quad \theta = kT. \quad (19)$$

Для случая толстой пластины, когда $\theta \rightarrow \infty$ ($\text{cth } \theta z \rightarrow 1$), имеем:

$$B(t) = \frac{B_0 e^{vt}}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z(\mu - z)e^{z^2 vt} dz}{(z^2 - 1)(\mu + z)}. \quad (20)$$

Контур Γ в (20) находится правее точки $z = 1$, являющейся полюсом подынтегрального выражения. Если учесть вычет в этом полюсе и переместить контур Γ на мнимую ось (поведение подынтегральной функции на плоскости z позволяет произвести соответствующую деформацию контура), то, вводя обозначение $x = -iz$, получаем:

$$B(t) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} B_0 - \frac{2\mu B_0 e^{-vt}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2 vt} dx}{(1 + x^2)(\mu^2 + x^2)}. \quad (21)$$

Записывая интеграл в виде разности:

$$\frac{1}{\mu^2 - 1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2 vt}}{1 + x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{x^2 vt}}{\mu^2 + x^2} dx \right]$$

и учитывая формулу [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\beta x^2}}{a^2 + x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x} e^{-\beta x}}{a^2 + x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} - \pi a e^{a^2 \beta} \text{erfc}(a\sqrt{\beta}), \quad (22)$$

где интеграл вероятности $\text{erfc}(x)$ определяется выражением

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (23)$$

находим следующее аналитическое выражение:

$$B(t) = B_0 \left\{ \frac{\mu - 1}{\mu + 1} - \frac{2\mu^2}{\mu^2 - 1} \left[e^{-(\mu^2 - 1)vt} \text{erfc}(\mu\sqrt{vt}) - \frac{1}{\mu} \text{erfc}\sqrt{vt} \right] \right\}. \quad (24)$$

Характер этой функции зависит от значения величин относительной магнитной проницаемости и проводимости σ , определяющих в совокупности параметры μ и ν в (24). Нетрудно определить в частности, что для идеального диамагнетика ($\mu = 0$) или для бесконечно высокой проводимости σ (при этом $\nu = 0$ для конечных μ) имеем $B(t) = -B_0$. Нас, однако, интересует случай больших по величине (но конечных) значений μ и конечных ν . При $\mu \gg 1$ из (24) получаем приближенную формулу

$$B(t) \approx B_0 [1 - 2e^{-\mu^2 vt} \text{erfc}(\mu\sqrt{vt})], \quad (25)$$

соответствующую данному случаю, когда не принимается во внимание конечная толщина T ферромагнитной пластины. Как видно из формулы (25), задержка, определяющая время установления процесса, равна

$$\tau_0 = \frac{1}{\nu \mu^2} = \frac{\mu_0 \sigma}{k^2 \mu}. \quad (26)$$

Таким образом, для толстой ферромагнитной пластины (количественные требования на величину T определяются ниже) инерционность, связанная с конечным временем диффузии магнитного поля в плиту, становится существенной при частотах порядка $f_0 = \frac{1}{\tau_0}$ и выше. Например, для $k = 20 \text{ м}^{-1}$, $\mu = 600$ и $\sigma = 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ имеем $f_0 \approx 2 \times 10^4 \text{ Гц}$.

Поясним физический смысл формулы (25). При $t = 0$, когда величина внешнего поля меняется скачком, в тонком поверхностном слое плиты индуцируются вихревые токи весьма большой плотности и плита работает как идеальный диамагнетик. Этому случаю по формуле (25) отвечает значение $B(t = 0) = -B_0$. При $t \rightarrow \infty$, когда вихревые токи затухли, плита ведет себя как ферромагнитное тело в статическом режиме, и при учете сделанного предположения о высоком значении магнитной проницаемости μ из (25) получаем $B(t \rightarrow \infty) = B_0$,

что отвечает режиму работы идеального ферромагнетика ($\mu = \infty$). Таким образом, с увеличением времени функция $B(t)$ плавно изменяется от значения $-B_0$ до значения B_0 , проходя при $t \approx \tau_0$ через нулевое значение.

Теперь перейдём к учёту конечной толщины T ферромагнитной пластины. Здесь не удастся получить для функции $B(t)$ аналитического выражения типа (24), поэтому ограничимся приближённой оценкой, определяющей влияние толщины T на ход процесса.

Вернемся к формуле (18). При конечном θ подинтегральное выражение имеет два полюса на вещественной оси $z = \pm 1$ и набор полюсов на мнимой оси, определяемых уравнением:

$$\mu^2 + z^2 + 2\mu z \operatorname{cth} \theta z = 0. \quad (27)$$

Вводя обозначение $z = ix$, перепишем уравнение (27) в виде:

$$\frac{x^2 - \mu^2}{2\mu x} = \operatorname{cth} \theta x. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет бесконечное число корней: $\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \dots$ (значения x_n считаются положительными и растущими с увеличением номера n). Переходя в (18) к интегрированию по мнимой оси и учитывая вычет в полюсе $z = 1$ и системы полувычетов при $z = \pm ix_1, \pm ix_2, \pm ix_3, \dots$, получаем:

$$B(t) = B_0 \left\{ \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1 + 2\mu \operatorname{ctg} \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n (\mu^2 + x_n^2) e^{-x_n^2 vt}}{(x_n^2 + 1) \left(x_n - \mu \operatorname{ctg} \theta x_n + \frac{\mu x_n \theta}{\sin^2 \theta x_n} \right)} \right\}. \quad (29)$$

Последнее выражение удобно для вычисления функции $B(t)$ при больших значениях t . Поскольку соседние корни уравнения (28) отстоят друг от друга на величину порядка $\frac{\pi}{\theta}$, то вследствие наличия в (29) экспоненциального множителя $\exp(-x_n^2 vt)$ бесконечный ряд можно заменить его первым членом ($n = 1$), если $t \gg \frac{\theta^2}{v\pi^2}$. Учитывая далее, что при $\mu \gg 1$ $x_1 \approx \frac{\pi}{\theta}$, имеем приближённо:

$$B(t) \approx B_0 \left\{ \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1 + 2\mu \operatorname{cth} \theta} - q e^{-\frac{\pi^2 vt}{\theta^2}} \right\}, \quad t \gg \frac{\theta^2}{\pi^2 v}, \quad (30)$$

где q – коэффициент, зависящий от параметров системы. Таким образом, как следует из (29), при учёте конечной толщины ферромагнитной пластины скорость установления процессов при $t \gg \frac{\theta^2}{v\pi^2}$ определяется постоянной времени τ_1 , равной:

$$\tau_1 = \frac{\theta^2}{\pi^2 v} = \mu \mu_0 \frac{\sigma T^2}{\pi^2}. \quad (31)$$

Существенно отметить, что формула (30) определяет временные изменения функции $B(t)$ лишь при больших t , когда процесс почти установился. Для получения оценки реального времени задержки при конечной толщине пластины T необходимо рассмотреть изменение функции $B(t)$ при малых временах t . Для этого вернёмся к формуле (18) и будем считать, что интегрирование считается вдоль прямой, параллельной мнимой оси: $z = a + ix$. Постоянную a будем считать положительной и большой, а x изменяющимся от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае для функции $\operatorname{cth} \theta z$ на линии интегрирования справедливо приближённое представление вида $\operatorname{cth} \theta z = 1 + 2e^{-2\theta z}$, которое является тем более точным, чем больше величина a . Интеграл (18) может быть переписан в следующей форме:

$$B(t) = \frac{B_0 e^{(a^2-1)vt}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a + ix)[\mu^2 - (a + ix)^2] e^{-vtx^2} e^{2ivtax} dx}{[(a + ix)^2 - 1][\mu^2 + (a + ix)^2 + 2\mu(a + ix)(1 + 2e^{-2a\theta - 2i\theta x})]}. \quad (32)$$

Записывая выражение (32) в виде:

$$B(t) = \frac{B_0 e^{(a^2-1)vt}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) e^{2ivtax} dx, \quad (33)$$

где

$$f(x) = \frac{(a + ix)[\mu^2 - (a + ix)^2]}{[(a + ix)^2][\mu^2 + (a + ix)^2 + 2\mu(a + ix)(1 + 2e^{-2a\theta - 2i\theta x})]}, \quad (34)$$

$$\varphi(x) = e^{-vtx^2}. \quad (35)$$

воспользуемся для вычисления интеграла (33) при малых t обобщённой формулой Парсеваля [3], согласно которой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\Phi(\lambda - s) ds. \quad (36)$$

Функции F и Φ в (36) являются Фурье-образами соответственно функций f и φ , так что, например, для функции F имеем

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) dx, \quad (37)$$

аналогичный вид имеет связь функций Φ и φ . Определим функцию $F(s)$ по (37), где функция f задана равенством (34). С этой целью, принимая во внимание малость величин $\exp(-2a\theta)$ в знаменателе формулы (34), запишем $f(x)$ в следующей форме:

$$f(x) \cong f_0(x) + f_1(x)e^{-2a\theta}, \quad (38)$$

где

$$f_0(x) = \frac{(a + ix)[\mu - (a + ix)]}{[(a + ix)^2 - 1][\mu + (a + ix)]}, \quad (39)$$

$$f_1(x) = \frac{-\frac{1}{\mu}(a + ix)^2[\mu - (a + ix)]e^{-2i\theta x}}{[(a + ix)^2 - 1][\mu + (a + ix)]^3}. \quad (40)$$

Если при вычислении интеграла (33) по формуле (36) подставить для $f(x)$ в (37) приближение $f_0(x)$, то получится формула (24), определяющая временной процесс при бесконечной толщине ферромагнитной пластины. Следовательно, второе оставшееся слагаемое в формуле (38), пропорциональное $\exp(-2a\theta)$, есть поправка, обусловленная конечным значением толщины пластины. Для определения данной поправки в соотношении (37) вместо $f(x)$ будем подставлять величину $f_1(x) \exp(-2a\theta)$.

Итак, рассмотрим интеграл:

$$F(s) = -4\mu e^{-2a\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a + ix)^2[\mu - (a + ix)]e^{ix(s-2\theta)}}{[(a + ix)^2 - 1][\mu + (a + ix)]^3} dx. \quad (41)$$

Вычисляя его через вычеты в полюсах $x = i(a \pm 1)$ и через вычет в полюсе третьего порядка $x = i(\mu + a)$, находим:

$$F(s) = 4\pi\mu e^{as} \left[\frac{\mu - 1}{(\mu + 1)^3} e^{s-2\theta} - \frac{\mu + 1}{(\mu - 1)^3} e^{-(s-2\theta)} + \chi(s)e^{-\mu(s-2\theta)} \right] h(s - 2\theta), \quad (42)$$

где

$$\chi(s) = 8\mu \frac{1 + \mu^2}{(\mu^2 - 1)^3} + 2(s - 2\theta) \left[\frac{1 + 3\mu^2}{(\mu^2 - 1)^2} - 1 \right] + \frac{2\mu^3}{\mu^2 - 1} (s - 2\theta)^2 \quad (43)$$

и функция $h(s - 2\theta)$ определена соотношением $h(x) = 0$ при $x < 0$ и $h(x) = 1$ при $x \geq 0$.

Подставляя теперь в формулу (36) вместо функции $\Phi(\lambda - s)$ Фурье-образ функции (35), равный $\sqrt{\frac{\pi}{vt}} e^{-\frac{(\lambda-s)^2}{4vt}}$, а вместо $F(s)$ – выражение (43), находим для величины $B(t)$, определяемой соотношением (33), следующее значение:

$$B(t) = -4\mu B_0 e^{-vt} \sqrt{\frac{\pi}{vt}} \int_{2\theta}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4vt}} \times \\ \times \left[\frac{\mu - 1}{(\mu + 1)^3} e^{s-2\theta} - \frac{\mu + 1}{(\mu - 1)^3} e^{-(s-2\theta)} + \chi(s) e^{-\mu(s-2\theta)} \right] ds. \quad (44)$$

Это значение не зависит от произвольно выбранного параметра a . Заменой переменной $s = \sqrt{x^2 + 4\theta^2}$ последний интеграл сводится к виду:

$$B(t) = -4\mu B_0 e^{-vt} \sqrt{\frac{\pi}{vt}} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2+4\theta^2}{4vt}}}{\sqrt{x^2 + 4\theta^2}} \times \\ \times \left[\frac{\mu - 1}{(\mu + 1)^3} e^{x_1-2\theta} - \frac{\mu + 1}{(\mu - 1)^3} e^{-(x_1-2\theta)} + \chi(x_1) e^{-\mu(x_1-2\theta)} \right] dx, \quad (45)$$

где $x_1 = \sqrt{x^2 + 4\theta^2}$. Асимптотическое при $t \rightarrow 0$ значение интеграла (45) может быть получено по методу Лапласа. При этом следует иметь в виду, что разложение по степеням величины $x_1 - 2\theta$ в экспоненциальных множителях (45) и полиноме (43) соответствует при малых значениях переменной интегрирования x разложению по степеням величины $\frac{x^2}{\theta}$, если $x \ll 2\theta$. Таким образом, множитель перед $\exp\left(-\frac{x^2}{4vt}\right)$ в подынтегральном выражении формулы (45) при малых x представляет собой полином вида $a_0 x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + \dots$. Непосредственным подсчётом легко найти, что $a_0 = 0$, а для величины a_1 при $\mu \gg 1$ имеем $a_1 \approx \frac{1}{\theta^2}$. Учёт члена a_1 при x^5 и следующих за ним может не производиться, поскольку для асимптотического разложения они отвечают более высоким степеням t , чем главный член a_1 . Принимая во внимание, что при $\alpha \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} f(x) dx = \frac{1}{2\alpha^2} f(0),$$

находим выражение для $B(t)$ при $vt \leq 1$:

$$B(t) \cong \frac{32\sqrt{\pi}\mu B_0}{\theta^2} (vt)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-vt - \frac{\theta^2}{vt}\right). \quad (46)$$

Эта формула является одним из выражений, определяющих постоянную времени (время релаксации) для процессов, связанных с диффузией магнитного поля в ферромагнетик конечной толщины. При этом данная формула определяет добавку при малых значениях t к временной зависимости (24), относящейся к случаю бесконечно толстой ферромагнитной пластины (анализируемая временная зависимость при больших значениях времени t даётся формулой (30)). Как и следовало ожидать, при $t = 0$ формула (46) даёт нулевое значение для $B(t)$. Это объясняется тем, что в начале вихревые токи сосредоточены в бесконечно тонком слое, и при этом реальная толщина ферромагнитной пластины не влияет на результирующее поле.

Проанализируем полученные результаты. Как видно из выражения (46), при $\mu \gg 1$ поправка к временной зависимости для индукции магнитного поля, учитывающая конечность толщины ферромагнитной пластины, содержит в общем случае две постоянные времени: $\tau_2 = \frac{1}{v}$, $\tau_3 = \frac{\theta^2}{v}$ (при $\theta \ll 1$ можно считать, что имеется лишь одна постоянная времени τ_2). При обычных условиях обе постоянные τ_2 и τ_3 значительно больше, чем величина τ_0 , определяемая соотношением (26). Поскольку поправка (46) предполагается малой, естественно потребовать, чтобы при $t = \tau_0$ выражение (46) было меньше B_0 . Это позволяет получить приближённое условие на величину θ , для которой справедливо приведённое рассмотрение:

$$\frac{32\sqrt{\pi}}{\theta^2 \mu^2} e^{-\theta^2 \mu} \ll 1. \quad (47)$$



При получении оценки (47) соблюдены условия $\mu \gg 1$, $\mu \gg \theta$. Как правило, для реальных систем магнитного удержания условие (47) выполняется заведомо. При этом, в соответствии со сказанным выше, постоянная времени, определяющая эффективное время релаксации при диффузии магнитного поля, равняется величине $\tau_0 = \frac{\mu_0 \sigma}{k^2 \mu}$, отвечающей случаю бесконечно толстой пластины ($\theta \rightarrow \infty$).

Приведённое выше рассмотрение относилось к случаю расчёта поля над ферромагнитной пластиной. Теми же методами может быть произведён расчёт поля внутри пластин. При этом используются коэффициенты отражения и преломления (13) и (14), найденные выше, но расчёт величины $B(t)$ внутри пластины предусматривает иной способ суммирования отражённых от границ полей. Итоговое выражение для поля $B(t)$ содержит интеграл типа (17), но теперь оказывается зависящим от координаты z . Отметим, однако, что при анализе временной зависимости для сил, действующих на удерживаемое тело (в принятой модели это ферромагнитная плита), нет необходимости в расчёте поля внутри плиты, поскольку сила взаимодействия целиком определяется характеристикой внешнего поля.

В заключение обсудим возможное влияние идеализации принятой расчётной модели на результат оценки эффективного времени релаксации. Реальная конструкция системы магнитного подвешивания предполагает расположение n -полюсного кольцеобразного магнитопровода (в исследованиях предполагалось $n = 8$) вокруг цилиндрической ферромагнитной цапфы (см. рис. 1). При этом полюса имеют чередующуюся полярность, и на краю полюсного наконечника магнитное поле в зазоре испытывает резкое изменение. В этих условиях для основной доли полярных чисел k , вносящих вклад в пространственный спектр магнитного поля в зазоре, выполняется соотношение $kR \gg 1$, где R – радиус ферромагнитной цапфы. Последнее неравенство, однако, показывает, что эффектами, связанными с кривизной поверхности цапфы, можно пренебречь, и при оценке времени релаксации считать границу плоской. Приближение плоской границы является тем более оправданным, что благодаря высокому значению магнитной проницаемости μ в соответствии с неравенством (47) даже при конечной и сравнительно небольшой толщине пластины эффективное время релаксации отвечает величине τ_0 , соответствующей бесконечной толщине пластины.

Таким образом, время, связанное с инерциальностью проникновения магнитного поля в ферромагнитное тело, при анализе работы систем подвешивания может быть принято равным $\tau_0 = \frac{\mu_0 \sigma}{k^2 \mu}$. Влияние указанной инерциальности на характеристики устойчивости системы автоматического управления может быть изучено стандартными методами. Можно, однако, предположить, что это влияние будет небольшим вследствие малости величины τ_0 в условиях, отвечающих работе системы магнитного удержания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Повышение точности вращения валов высокоскоростных роторных систем / А. В. Космынин, В. С. Щетинин, С. М. Копытов [и др.] // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2013. – № III-1(15). – С. 47-51.
2. Ким, К. И. Теория электродинамической левитации. Основные результаты и дальнейшие задачи / К. И. Ким, В. М. Кочетков, И. И. Трещев. // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1981. – № 1. – С. 72-91.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжиков. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 352 с.