

СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
BUILDING AND ARCHITECTURE

Сысоев О. Е., Добрышкин А. Ю., Нейн Сит Наинг
O. Ye. Sysoev, A. Yu. Dobryshkin, Sit Naing Nyein

**ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ И ТЕМПЕРАТУРНОГО СДВИГА
НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН (МЕМБРАН)**

**INFLUENCE OF ATTACHED MASS AND TEMPERATURE ON THE SHEAR
VIBRATIONS OF THIN PLATES (MEMBRANES)**

Сысоев Олег Евгеньевич – доктор технических наук, профессор, декан факультета кадастра и строительства Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, г. Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: fks@knastu.ru.

Mr. Oleg Ye. Sysoev – D.Sc. in Engineering, Professor, Dean of Cadastre and Civil Engineering Faculty Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Ave., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: fks@knastu.ru.

Добрышкин Артем Юрьевич – старший преподаватель кафедры «Строительство и архитектура» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, г. Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: wwwartem21@mail.ru.

Mr. Artem Yu. Dobryshkin – Senior Lecturer, Civil Engineering and Architecture Department Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Ave., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: wwwartem21@mail.ru.

Нейн Сит Наинг – аспирант кафедры «Строительство и архитектура» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, г. Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: wwwartem21@mail.ru.

Mr. Nyein Sit Naing – a post-graduate student, Civil Engineering and Architecture Department Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Ave., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: wwwartem21@mail.ru.

Аннотация. Лаборатория, исследующая строительные конструкции Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (КнАГТУ), позволяет проводить эксперименты влияния присоединенных масс на колебания конструкций. В данной статье рассмотрен поставленный эксперимент для изучения влияния присоединенной массы на собственные колебания шарнирно-опертой пластины при температурном сдвиге. С помощью эксперимента удалось выявить закономерности влияния градиента температур на собственные колебания пластины с присоединенной массой. С помощью индукционных акселерометров измерены вынужденные колебания тонкой пластины, несущей присоединенную массу, при температурном сдвиге. Пластина прямоугольная в плане. Способ закрепления – шарнирно-опертая по краям. Шарнирно-опертые пластины широко распространены в строительстве. Исследований подобного рода не существует. Расчет проводился на основании общего уравнения колебания пластин. Пластина идеализирована в плоскости, перпендикулярной поверхности. Присутствуют допущения о неидеальной упругости материала, о нелинейности колебаний.

Summary. The laboratory, which studies building constructions, of Komsomolsk-on-Amur State Technical University (KnASTU) allows carrying out experiments of influence of attached masses on the structural vibrations. In this article, we consider the experiments performed to study the effect of an attached mass on the natural oscillations of a hinged-supported plate under a temperature shift. With the help of the experiment it was possible to reveal the regularities of the influence of the temperature gradient on the natural oscillations of a plate with an attached mass. With the help of induction accelerometers, forced oscillations of a thin plate bearing an attached mass are measured under temperature shear. The plate is rectangular in plan. The method of fastening is articulated at the edges. Hinged-supported plates are widely distributed in construction. There is no research of this kind. The calculation was based on the general equation of plate oscillation. The plate is idealized in a plane perpendicular to the surface. There are assumptions about the imperfect elasticity of the material, the nonlinearity of the oscillations.

Ключевые слова: пластина, нелинейные колебания, модель устойчивости.

Key words: plate, nonlinear oscillations, stability model.

УДК 624.074.434

Широкое использование пластин в строительстве и машиностроении обусловлено простотой изготовления и эффективности с точки зрения прочности геометрической формы пластин. Возникновение собственных колебаний от интенсивных динамических нагрузок при эксплуатации таких конструкций не ограничивает эксплуатацию шарнирно-опертых пластин. Явления данного рода зачастую сопровождаются изменением широкого спектра температур. Хотя данное обстоятельство изучено не в полной мере, эксплуатация пластин присутствует. И интерес к анализу динамики тонких пластин очень высок в широких сферах деятельности [1-4].

Для исследования влияния присоединенной массы при температурном сдвиге в лаборатории строительных конструкций КнАГТУ проведен специальный эксперимент. Опытный образец, находящийся в специальном стенде (см. рис. 1), подвергался резкому изменению температурного режима при наличии собственных колебаний.

Данная работа отражает исследования собственных колебаний тонкой прямоугольной пластины в плане, шарнирно-опертой с двух сторон. Получены уравнения собственных колебаний пластины, согласно общепринятой теории колебаний пластин, а также экспериментальные данные, отражающие зависимость влияния присоединенной массы на собственные частоты колебаний оболочки, при сдвиге температур. Колебания с умеренными амплитудами собственных колебаний были разложены, согласно уравнениям [5; 6]. Дискретная нелинейная модель колебаний тонкой пластины, опертой по краям, полученная при проведении исследований, исследовалась с применением метода многих масштабов.

Образец представляет собой тонкую пластину, прямоугольную в плане, из оцинкованной стали. Геометрические характеристики объекта: $L = 890$ мм, $B = 370$ мм, $H = 0,4$ мм. Образец представлен на рис. 1.

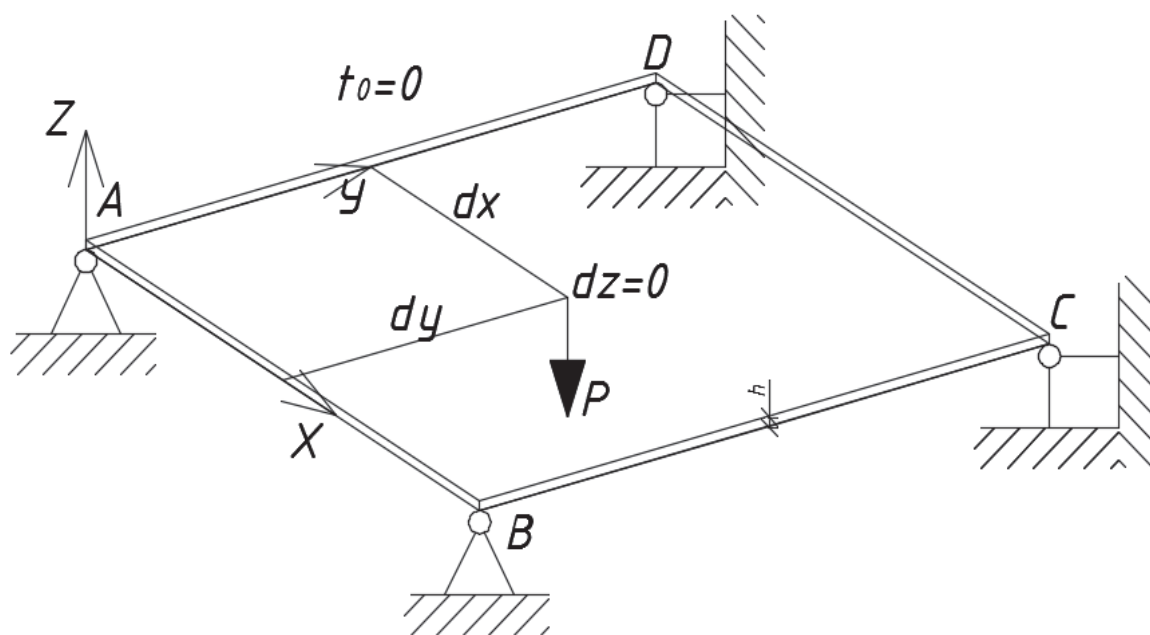


Рис. 1. Образец оболочки

Образец состоит из стали марки 3, полукипящей. Модель оболочки закрепляется в стальном стенде. Данный стенд имеет форму столика, изготовленного из равнополочных уголков L45×3 сталь ст3сп, специально для проведения данного эксперимента. Шарнирная опертость реализована с помощью стеклянных пластин 30×30 мм толщиной 4 мм, уложенных в форме уголка. Граничные условия максимально приближены к реальным. Присоединенную массу представляет акселерометр BC 110, расположенный на образце, согласно рис. 2. Акселерометр BC 110 измеряет частоту колебаний с максимальной точностью.



Рис. 2. Типовой акселерометр BC 110

Акселерометр BC 110 передаёт показания на усилитель сигнала, который, усиливая сигнал, передаёт далее по цепи на аналого-цифровой преобразователь, передающий сигнал далее на персональный компьютер. Термометр расположен максимально близко к оболочке, но не касается её, передаёт показания на программное обеспечение «Z-lab», где в купе с данными колебаний отражаются зависимости одних параметров от других в режиме реального времени. Программное обеспечение «Z-lab» позволяет отображать и записывать колебания в реальном времени. Нагревательный элемент создаёт градиент температур. Блок-схема экспериментальной установки для проведения эксперимента представлена на рис. 3.

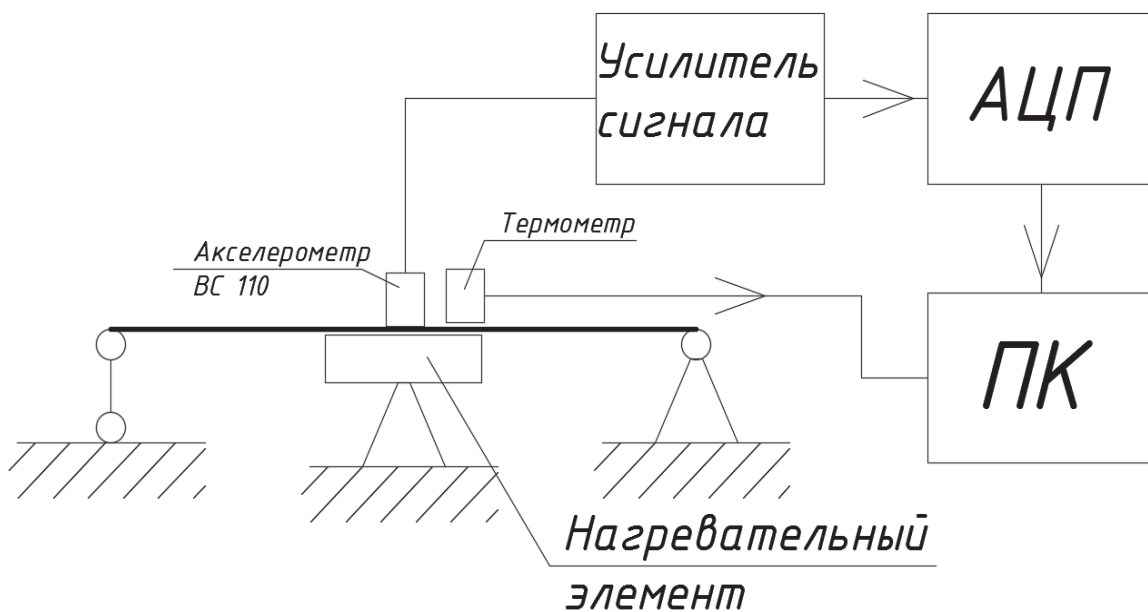


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки

Эксперимент направлен на изучение собственных колебаний пластины в «покое» и выявление зависимостей вынужденных и собственных колебаний от перепада температур. Вынужденные колебания, переходя в собственные колебания, задавались с помощью удара испытательным молотком AU03. Также присутствовал бесконтактный датчик измерения колебаний пластины, не отображенный на схеме. Данный датчик является проверяющим, служит для проверки и отбраковки ошибочных данных показаний акселерометра BC 110.

Перейдем к рассмотрению математической модели собственных колебаний пластины, прямоугольной в плане, шарнирно-опертой с двух сторон. Процесс колебания плоской тонкой однородной пластины описывается уравнением

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}).$$

Функция $u(x, y, t)$ характеризует прогиб пластины. Начальные условия описываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \\ u_t(x, y, 0) &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\}$$

а граничные условия

$$u_y(0, y, t) = 0, u_y(b_1, y, t) = 0,$$

$$u_x(x, 0, t) = 0, u_x(x, b_2, t) = 0.$$

$X''(x) + \nu X(x) = 0$ – уравнение второго порядка, однородное линейное дифференциальное с постоянными коэффициентами. Параметр ν является значимым. Для решения следует рассмотреть случаи нахождения параметра ν выше нуля, равным нулю, ниже нуля. Тогда, учитывая граничные условия, выражаем:

$$X'(x) = D_1 \sqrt{\nu} \sin \sqrt{\nu} x + D_2 \sqrt{\nu} \cos \sqrt{\nu} x;$$

$$X'(0) = \sqrt{\nu} D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0, \text{ т.к. } \nu \neq 0;$$

$$X'(b_1) = -D_1 \sqrt{\nu} \sin \sqrt{\nu} b_1 = 0.$$

$D_1 \neq 0$, т.к. значимыми являются нетривиальные решения, $\nu \neq 0$, следовательно

$$\sin \sqrt{\nu} b_1 = 0;$$

$$\sqrt{\nu} b_1 = \pi n, n \in Z;$$

$$\nu = \left(\frac{\pi n}{b_1} \right)^2, n \in Z.$$

Из этого следует, что только при значениях, равных $\nu_n = \nu = \left(\frac{\pi n}{b_1} \right)^2$, существует нетривиальное решение уравнений, имеющее вид

$$X_n(x) = \cos \frac{\pi n}{b_1} x.$$

Аналогично получаем решение задачи

$$Y_m(y) = \cos \frac{\pi m}{b_2} y;$$

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{b_2} \right)^2.$$

Собственные значения $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b_2} \right)^2$, соответствующие собственной функции:

$$v_{n,m} = A_{n,m} \cos \frac{\pi n}{b_1} y \cos \frac{\pi m}{b_2} y,$$

где $A_{n,m}$ – некоторый постоянный множитель.

Представим его так, чтобы функция $v_{n,m}$ была целократно единице:

$$\int_0^{b_1} \int_0^{b_2} v_{n,m}^2 dx dy = A_{n,m}^2 \int_0^{b_1} \cos^2 \frac{\pi n}{b_1} x dx \int_0^{b_2} \cos^2 \frac{\pi m}{b_2} y dy = 1.$$

Интегралы вычислены отдельно

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{b_1} \cos^2 \frac{\pi n}{b_1} x dx &= \int_0^{b_1} \frac{1 + \cos \frac{2\pi n}{b_1} x}{2} dx = \int_0^{b_1} \frac{1}{2} dx + \int_0^{b_1} \cos \frac{2\pi n}{b_1} x dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{b_1} + \frac{b_1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{b_1} x \Big|_0^{b_1} = \\ &= \frac{1}{2} b_1 + \frac{b_1}{2\pi n} \sin 2\pi n - \frac{b_1}{2\pi n} \sin 0 = \frac{1}{2} b_1; \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^{b_2} \cos^2 \frac{\pi m}{b_2} y dy = \frac{1}{2} b_2.$$

$$A_{n,m}^2 \frac{1}{2} b_1 \frac{1}{2} b_2 = 1 \quad ; \quad A_{n,m}^2 = \frac{4}{b_1 b_2} \Rightarrow A_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} ;$$

$$v_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \cos \frac{\pi n}{b_1} y \cos \frac{\pi m}{b_2} y.$$

Количество целочисленных решений n и m уравнения

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b_2} \right)^2$$

зависит от числа собственных функций, принадлежащих $\lambda_{n,m}$.

Значения $\lambda_{n,m}$ принадлежат решению уравнения $T'' + a^2 \lambda T = 0$

$$T_{n,m}(t) = \overline{B_{n,m}} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} a t + \overline{\overline{B_{n,m}}} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} a t,$$

где $\overline{B_{n,m}}$ и $\overline{\overline{B_{n,m}}}$ – произвольные константы.

Исходя из дополнительных условий, начальное решение задачи $u_{t,t} = a^2 (u_{x,x} + u_{y,y})$ будет найдено с помощью частных решений, которые, в свою очередь, имеют представление

$$u_{n,m}(x, y, t) = v_{n,m}(x, y) \left(\overline{B_{n,m}} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} a t + \overline{\overline{B_{n,m}}} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} a t \right).$$

Вычисляем общее решение

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{B_{n,m}} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}} a t + \overline{\overline{B_{n,m}}} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}} a t \right) v_{n,m}(x, y),$$

где $v_{n,m}(x, y)$ определяется решением, а коэффициенты $\overline{B_{n,m}}$ и $\overline{\overline{B_{n,m}}}$ равны

$$\overline{B_{n,m}} = \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \varphi(x, y) v_{n,m}(x, y) dx dy = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \varphi(x, y) \cos \frac{\pi n}{b_1} x \cos \frac{\pi m}{b_2} y dx dy,$$

$$\overline{\overline{B_{n,m}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \lambda_{n,m}}} \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \psi(x, y) \cos \frac{\pi n}{b_1} x \cos \frac{\pi m}{b_2} y dx dy.$$

Данное уравнение показывает наличие зависимости прогиба пластины от граничных условий. Граничные условия отражают характеристики материала пластины, которые зависят от температуры пластины. Изменение градиента температуры влияет на колебания пластины.

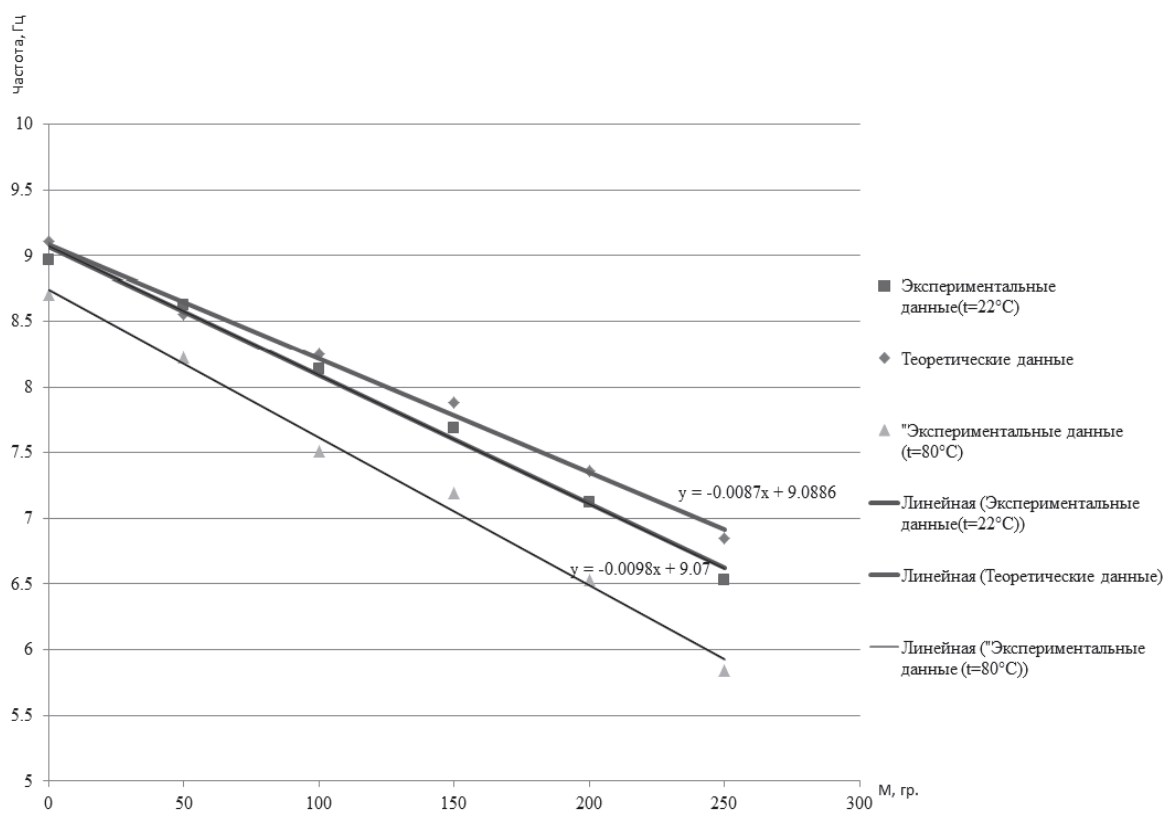


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний оболочки от величины присоединенной массы

Рис. 4 отражает зависимость результатов расчета собственных частот и форм колебаний стальной прямоугольной в плане пластины от присоединенной массы. Частоты колебаний указаны в герцах. В результате становится понятно несовпадение теоретических данных и расчетных данных. Разница теоретических и экспериментальных данных при температуре $t = 22^\circ\text{C}$ и при присоединенной массе менее 150 г составляет менее 5%. Данный факт говорит о точности расчета собственных колебаний пластины, несущей малую присоединенную массу, эксперимент проведен максимально точно. Разница в теоретических и экспериментальных данных при температуре $t = 22^\circ\text{C}$ и при присоединенной массе более 150 г составляет более 5%. Это говорит о неточности современных теоретических данных, расчет с помощью которых приведет к данным, несоответствующим практическим более чем на 5%. Разница теоретических и экспериментальных данных при температуре $t = 70^\circ\text{C}$ и при присоединенной массе любой величины составляет более 5%. Требуется уточнение расчетной модели колебаний пластин. Максимальное несовпадение теоретиче-

ских и расчетных данных происходит при максимальной присоединенной массе, использованной в исследовании – 250 г. Разница составляет 15 %. При присоединенной массе в 50 г разница составляет 1 %. Данное обстоятельство указывает на необходимость проведения дополнительных исследований колебаний пластин с участием присоединенной массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, Л. В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л. В. Андреев, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.
2. Малышев, А. П. Дифференциальная модель частотно-независимого рассеяния энергии при колебаниях / А. П. Малышев // ПММ. – 0000. – Т. 66, вып. 1. – С. 107-133.
3. Григолюк, Э. И. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
4. Куликов, Г. М. Нелинейные колебания многослойных пластин / Г. М. Куликов, Ю. В. Кулешов // Вестник Тамб. гос. ун-та. – 0004. – Т. 9, вып. 0. – С. 064067.
5. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1970. – 430 с.
6. Сысов, О. Е. Влияние присоединенной массы на вынужденные колебания разомкнутых оболочек / О. Е. Сысов, А. Ю. Добрышкин, Сит Найнг Нейн // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2016. – № III-1(27). – 110 с.