



Штука В. И.

V. I. Shtuka

ПРИМЕНЕНИЕ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПРОДЕФОРМИРОВАННОГО УПРУГОГО СЛОЯ

THE RAY METHOD APPLICATION FOR STAIN-STRESS STATE OF ELASTIC CYLINDRICAL LAYER WITH PRELIMINARY DEFORMATIONS DEFINITION

Штука Виктор Игоревич – аспирант Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, г. Владивосток). E-mail: onslice@mail.ru.

Mr. V. I. Shtuka – A post-graduate student in Institute of Automation and Controlled Processes, FEB RAS (Russia, Vladivostok). E-mail: onslice@mail.ru.

Аннотация. Указаны особенности применения лучевого метода к нестационарным задачам теории упругости, решение которых получается посредством учёта распространяющихся поверхностей сильных разрывов (ударных волн). В случае наличия осевой симметрии и предварительных деформаций скручивающего типа построено решение с дополнительным разложением самого разрыва непосредственно на ударной волне. Данное обстоятельство продиктовано спецификой сильных разрывов и невозможностью получения рекуррентных обыкновенных дифференциальных соотношений (уравнений затухания). Полученное приближённое решение используется для инициализации специально сконструированной численной схемы, учитывающей наличие поверхностей разрывов. Решение уравнений движения за фронтами распространяющихся деформаций делает возможным уточнение интенсивностей ударных волн и позволяет определить напряжённно-деформированное состояние слоя без ограничений на интенсивность ударного воздействия и в конечное послеударное время.

Summary. Application of the ray method is specified to the nonstationary problems of the theory of elasticity; solution of which is obtained by taking into account propagating surfaces of strong discontinuities (shock waves). In the case of axial symmetry and preliminary torsional deformation another feature to build the solution, consisting in a further break decomposition directly on the shock wave is demonstrated. This circumstance is dictated by the specifics of strong breaks and the impossibility of obtaining the recurrent ordinary differential relations (attenuation equations). The approximate solution is used to initialize a specially constructed numerical scheme that take the presence of the surface of discontinuity into account. The solution to the motion equations behind the wave fronts makes refinement of the intensities possible and allows to define layer stress-strain state without any restrictions for the intensity of impact action and post-impact time finiteness.

Ключевые слова: упругость, динамика, лучевой метод, ударные волны, численное моделирование.

Key words: elasticity, dynamics, ray method, shock waves, numerical simulation.

УДК 539.3

Введение

Изучение свойств нелинейно-упругих твёрдых тел ввиду особенностей их поведения при нестационарных воздействиях является одной из актуальных задач математической физики и механики сплошных сред. Математическое описание таких технологических процессов, какковка и штамповка, предполагает учёт существенных перепадов напряжений и скоростей. Так, в частности, ударное нагружение, произведённое на внешнюю границу нелинейно-упругого полупространства, вызывает распространение в нём квазипродольных и квазипоперечных поверхностей разрывов скоростей (ударных волн).

Точное аналитическое решение подобных задач представляет значительные трудности, поэтому многие исследователи пользуются методиками построения приближённого решения (методом возмущений или методом лучевых рядов), а также специальными схемами численных расчё-

тов, учитывающими распространение особых поверхностей. Лучевой метод, предложенный в работах [1, 148-152] и [7, 142-144] независимо друг от друга, обладает хорошими качественными характеристиками представления неизвестных функций за поверхностями разрывов при условии малости послеударных времён. Изначально лучевой метод не применялся для решения задач с ударными волнами ввиду невозможности получения замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Его модификация, предложенная А. А. Бурениным и Ю. А. Россихиным [3, 131-136], позволила преодолеть данный аспект за счёт введения дополнительного разложения на ударных волнах по дельта-производным [9, 40-45], что позволило замкнуть систему уравнений метода. Продемонстрируем употребление модифицированного лучевого метода на примере решения задачи определения деформированного состояния несжимаемого упругого цилиндрического слоя с предварительными скручивающими деформациями. Описание особенностей поведения эластомеров при нестационарных воздействиях и распространении в них сдвиговых ударных волн содержится в работе [9, 12-14].

Модель несжимаемого упругого тела

Модель изотропного несжимаемого упругого тела представлена соотношениями в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}),\end{aligned}\quad (1)$$

где u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей; σ_{ij}, α_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши-Эйлера и деформаций Альманзи; p – функция добавочного всестороннего давления, $\rho = const$ – плотность среды.

Индексом после запятой обозначена производная по соответствующей пространственной координате, точкой сверху – по времени. Потенциал изотропной несжимаемой упругой среды W (плотность распределения внутренней энергии) представлен разложением в ряд Тейлора относительно свободного состояния по инвариантам тензора деформаций

$$\begin{aligned}W(A_1, A_2) &= -2\mu A_1 + b A_1^2 - \mu A_2 - a A_1^3 - (\mu - b)A_1 A_2 + \dots, \\ A_1 &= \alpha_{kk}, & A_2 &= \alpha_{ik}\alpha_{ki},\end{aligned}\quad (2)$$

где μ – модуль сдвига; a, b – модули упругости третьего порядка.

Сокращение числа постоянных материала вызвано характером дальнейшего винтового деформирования, заставляющего их быть связанными между собой [6, 313-317]. Таким образом, компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат r, φ, z будут иметь вид

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t), \quad (3)$$

где функция $\psi(r, t)$ отвечает за поворот точки относительно оси Z в процессе движения, а функция $u(r, t)$ – за её смещение вдоль этой же оси.

Поверхности разрывов и лучевой метод

При существенно нестационарных нагрузках в процессе деформирования среды возникают резкие перепады скоростей, напряжений и других параметров, которые при математическом описании представляются разрывами первого рода. На поверхностях, где искомые функции претерпевают скачки, выполняются кинематические, геометрические и динамические условия совместности (следствия интегральных законов сохранения), которые позволяют определить взаимосвязь величин разрывов и скорости их распространения. Так, в несжимаемой упругой среде с предвари-

тельными деформациями ($\psi_{,r} \neq 0$) возможно существование и распространение двух поверхностей разрывов деформаций: первой волны нагрузки Σ_1 и второй волны круговой поляризации Σ_2 со скоростями

$$G_1 = C(1 + \chi_1 r^4 (5\psi_{,r}^4 + C^{-4}\lambda_1^4) + \dots),$$

$$G_2 = C(1 + \chi_1 r^4 (\psi_{,r}^4 + C^{-4}\lambda_1^4) + \dots),$$

$$\chi_1 = 3\mu^{-1}(a - b + \mu)/4, \quad C = \sqrt{\mu/\rho}.$$

При этом первая волна увеличивает предварительный сдвиг, а вторая изменяет его направленность и является изоэнтропийной. В рамках линейной теории получить такие результаты было бы невозможно ввиду эффектов, вызванных слагаемыми старшего порядка.

За волной нагрузки Σ_1 приближённое решение запишем в форме лучевого ряда

$$\psi^-(r, t) = \psi(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{(t-t_1)^j}{j!}, \quad \lambda_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_1}, \quad t_1 = \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi, \quad (4)$$

а за волной круговой поляризации Σ_2

$$\psi^-(r, t) = \psi(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \quad u^-(r, t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t-t_2)^j}{j!},$$

$$\eta_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_2}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{\Sigma_2}, \quad t_2 = \int_0^r G_2^{-1}(\xi) d\xi. \quad (5)$$

На фронте Σ_1 из уравнения движения (1), представленного в разрывах, записывается уравнение затухания для разрыва скорости

$$\frac{\delta \lambda_1}{\delta t} = \lambda_1 \left(-\frac{3C}{2r} + 10 \frac{\chi_1}{C} r^4 \psi_{,r}^3 (\lambda_2 - C^2 \psi_{,rr}) \right) + \dots \quad (6)$$

На фронте Σ_2 получается уже система (к уравнению затухания добавляется ещё алгебраическое соотношение на разрыв ускорения)

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = \omega_1 \left(-\frac{1C}{2r} + 2C \chi_1 r^4 \psi_{,r}^3 (\lambda_2 - C^2 \psi_{,rr}) \right) + \chi_1 r^3 \psi_{,r}^2 \lambda_1 \left(\omega_1 \left(\frac{\psi_{,r}}{r} + 6 \left(\frac{\lambda_2}{C^2} - \psi_{,rr} \right) \right) + 2 \frac{r \omega_2 \psi_{,r}}{C} \right) + \dots,$$

$$\eta_2 = -\frac{\omega_1 \omega_2}{Cr^2 \psi_{,r}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\lambda_1}{Cr \psi_{,r}} (1 - \chi_1 r^4 \psi_{,r}^4) \right) + \dots \quad (7)$$

Разрешая системы (6), (7) с учётом краевых условий и дополнительных разложений разрывов на волновых фронтах

$$\lambda_1 = (\lambda_{10} + \lambda_{11} t_1)(t - t_1) + \dots, \quad \lambda_2 = \lambda_{20}(t - t_1)^2 + \dots, \quad (8)$$

$$\omega_1 = (\omega_{10} + \omega_{11} t_2)(t - t_2) + \dots, \quad \omega_2 = \omega_{20}(t - t_2)^2 + \dots,$$

было получено приближённое решение задачи.

Численное моделирование

Полагаем, что несжимаемая упругая среда, движение которой подчиняется соотношениям (1), (2), (3), заполняет собой цилиндрический слой, расположенный между жёсткими цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). На внешней границе слоя выполняется условие жёсткой спайки. На внутренней границе задана компонента перемещений $\psi(r_0, 0) = \psi_0$, определяющая предварительные ($t \leq 0$) деформации в слое. Для времени $t > 0$ краевые условия имеют вид

$$\psi(r_0, t) = \psi_0, \quad \psi(R, t) = 0, \quad (9)$$

$$u(r_0, t) = u_1 t + u_2 t^2, \quad u(R, t) = 0,$$

которые инициируют распространение двух расходящихся от внутренней поверхности слоя ударных волн.

После получения приближённого решения были произведены и соответствующие численные расчёты, с представлением решения за ударными волнами в виде лучевых рядов по типу (4), (5) и (8). Для моделирования была выбрана неявная схема с конечными разностями, учитывающая изменение положения фронта ударных волн и то обстоятельство, что для определённого числа временных слоёв невозможна аппроксимация вторых производных функций, входящих в уравнение движения (1). Дельта-производные аппроксимировались линейно

$$\frac{\delta \omega_l}{\delta t} \cong \frac{\omega_{l,j} - \omega_{l,j-1}}{\Delta t}.$$

Схема предполагает наличие простого итеративного счёта и решение задачи оптимизации на каждом шаге методом наименьших квадратов. Более подробное описание численной методики расчётов содержится в работе [5, 52-56].

График (см. рис. 1) для компоненты осевого смещения представлен эпюрами осевого смещения с обозначением соответствующего времени, для которого они показаны. Параметры модельных расчётов (9) были выбраны следующими: $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $C = 50 \text{ м/с}$, $\chi_1 = 100$, $\psi_0 = 0.02\pi$, $u_1 = 1 \text{ м/с}$, $u_2 = 10 \text{ м/с}^2$, $r_0 = 0.01 \text{ м}$, $R = 0.02 \text{ м}$.

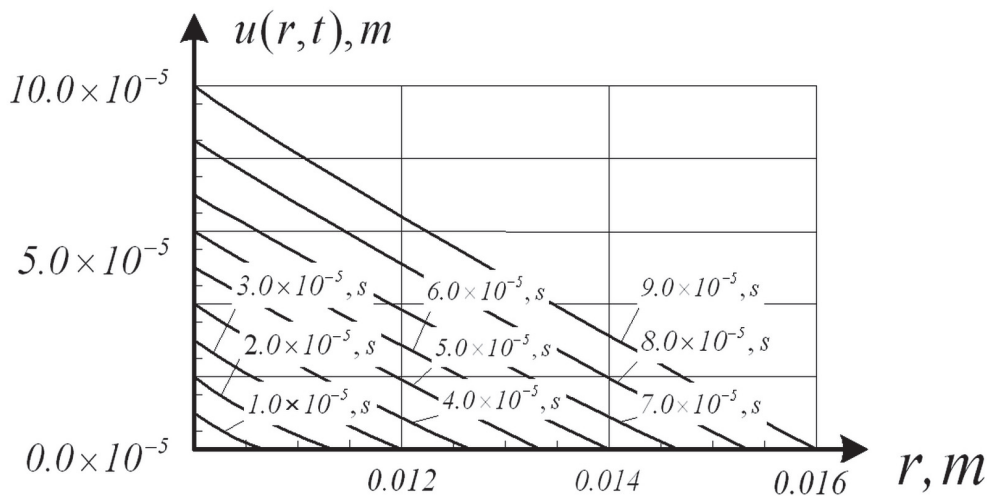


Рис. 1. Эпюры осевого смещения точек слоя

Заключение

В рамках нелинейной теории упругости удалось получить приближённое решение сложной задачи определения деформированного состояния несжимаемого слоя постоянной кривизны с расходящимися ударными волнами посредством применения модифицированного метода лучевых рядов. Для более точного результата в отношении расширенного диапазона временной переменной была применена специальная расчётная схема, использующая в качестве начального приближения величины, полученной из приближённого решения.

Отметим ещё раз, что фактор наличия предварительных деформаций на этапе постановки является существенным, поскольку именно он влияет на качественные и количественные характеристики процесса.

Дополнительным ограничением необходимо считать наличие кинематической связи (условия несжимаемости), которая позволяет перейти к рассмотрению только волн изменения формы (а не объёма) и априори знать очерёдность их распространения [2, 16].

В сравнении с результатами работы [4, 404-409] можно отметить различия в особенностях распространения различных типов деформационных воздействий, но и вместе с тем схожесть полученных систем, обусловленную идентичностью уравнений затухания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабичева, Л. А. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязкопластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145-155.
2. Буренин, А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы / А. А. Буренин, О. В. Дудко, А. А. Лаптева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14. – № 4. – С. 14-23.
3. Буренин, А. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – С. 129-137.
4. Буренин, А. А. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя / А. А. Буренин, Г. М. Севастьянов, В. И. Штука // Вычислительная механика сплошных сред, 2016. – Т. 9. – № 4. – С. 400-411. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.33.
5. Герасименко, Е. А. Численное решение задачи о несжимаемом слое / Е. А. Герасименко, А. А. Заверган // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1. – № 3. – С. 46-56.
6. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
7. Achenbach, S. D. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media / S. D. Achenbach, D. R. Reddy // Zeitschr fur angew. Math und Phys. – 1967. – V. 18. – P. 141-144.
8. Chu Boa-Teh. Transverse shock waves in incompressible elastic solids / Chu Boa-Teh // J. Mech. Phys. Solids, 1967. – V. 15. – № 1. – P. 1-14.
9. Tomas, T. Y. Plastic Flow and fracture in solids / T. Y. Tomas. – New York, London: Academic Press, 1961. 271 p.