Россихин Ю. А., Шитикова М. В.
Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ОБОЛОЧКАХ ИЗ ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

NON-STATIONARY WAVE ANALYSIS IN SHELLS FROM COSSERAT PSEUDO-CONTINUUM

Россихин Юрий Алексеевич – доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор Воронежского государственного технического университета, научный центр по фундаментальным исследованиям (Россия, Воронеж). E-mail: yar@vgasu.vrn.ru.
Mr. Yuri A. Rossikhin – Doctor of Physics and Mathematics, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Voronezh State Technical University, Research Center for Basic Research (Russia, Voronezh). E-mail:yar@vgasu.vrn.ru.

Шитикова Марина Вячеславовна – доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного технического университета, научный центр по фундаментальным исследованиям (Россия, Воронеж). E-mail:mvs@vgasu.vrn.ru.
Ms. Marina V. Shitikova – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State Technical University, Research Center for Basic Research (Russia, Voronezh). E-mail:mvs@vgasu.vrn.ru.

Аннотация. Изучены условия существования и закономерности распространения существенных нестационарных волн в упругих оболочках с учётом инерции вращений и деформаций поперечного сдвига. Уравнения движения оболочки получены согласно трёхмерной модели, свободной от гипотезы отсутствия моментных напряжений (континуума Коссера), путём направленного использования лучевого подхода к теории условий совместности разрывов. При следовании динамическим условиям совместности вычислены скорости движений возможных поверхностей сильного разрыва и указаны их свойства.

Summary. Conditions for the existence and regularity of the substantial nonstationary waves distribution in elastic shells are studied taking into account the rotation inertia and deformations of the transverse shear. The equations of shell motion are obtained according to the three-dimensional model of the absence of the moment stresses (the Cosserat continuum) free from the hypothesis by the directed use of the ray approach to the theory of compatibility conditions for discontinuities. Following dynamic compatibility conditions, the velocities of the motions of possible surfaces of a strong discontinuity are calculated and their properties are indicated.

Ключевые слова: упругость, моментные напряжения, оболочки, условие совместности разрывов, лучевой метод, ударные волны.

Key words: elasticity, moment stresses, shells, the compatibility condition of discontinuities, the ray method, shock waves.

УДК 539.3

Работа выполнена по государственному заданию Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 9.994.2017/4.6.

Материал поступил 15.07.2018

Введение

Уже прошло 100 лет с тех пор, как С. П. Тимошенко в своей «пионерской» работе [4] обобщил модель балки Бернулли – Эйлера, введя в рассмотрение две независимые функции: перемещение центра тяжести поперечного сечения и вращение поперечного сечения относительно продольной центральной оси сечения.

Для чего учитывалась инерция вращения и деформация поперечного сдвига? Для того чтобы тонкие тела воспринимали нестационарные поперечные нагрузки, которые приводят к зарождению и рассмотрению нестационарных поперечных волн сдвига [1]. Классические уравнения, которые описывают динамическое поведение тонких тел, не допускают распространение таких волн. Но нестационарные волны распространяются в виде поверхностей сильного или слабого разрывов. Поэтому естественно для решения таких задач использовать теорию разрывов, основанную на лучевых рядах и условиях совместности, учитывающих поперечную деформацию тонких тел. При этом нужно исходить из трёхмерных уравнений, описывающих поведение того материала, из которого состоит тонкое тело.

Этот подход является новым и не менее «пионерским», чем подход С. П. Тимошенко, но, в отличие от последнего, он не содержит таких новых констант материала, как коэффициент сдвига *K*, который к тому же не определяется экспериментально.

Данный подход разрабатывался авторами с 2007 года, и за десять прошедших лет удалось создать стройную теорию, описывающую динамическое поведение таких тонких тел, как упругие пластинки и оболочки [5], упругие балки сплошного поперечного сечения [6], упругие тонкостенные пространственно изогнутые балки открытого профиля [7], термоупругие тонкостенные балки [8; 9] и тонкостенные балки из псевдоконтинуума Коссера [10; 11].

В данной работе созданная теория распространяется на оболочки из псевдоконтинуума Коссера.

Постановка задачи и определяющие уравнения

Будем исходить из системы уравнений, описывающих динамическое поведение трёхмерного псевдоконтинуума Коссера [2; 12]:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \alpha(u_{i,j} - u_{j,i} - 2\in_{kij}\psi_k), \tag{1}$$

$$\mu_{ij} = \beta\psi_{k,k}\delta_{ij} + \gamma(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) + \varepsilon(\psi_{i,j} - \psi_{j,i}), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho\dot{v}_i,\ \mu_{ij,j} + \in_{ijk}\sigma_{jk} = J\dot{\omega}_i, \tag{3}$$

где σ_{ij} – тензор напряжений; μ_{ij} – тензор моментных напряжений; $\in_{kij}$ – тензор Леви-Чивита; u_i – вектор перемещений; $v_i = \dot{u}_i$ – вектор скоростей (точка означает производную по времени *t*, а индекс, стоящий после запятой, означает производную по соответствующей координате); ψ_i – вектор углов поворота; $\omega_i = \dot{\varphi}_i$ – вектор угловой скорости; ρ – плотность; δ_{ij} – символ Кронекера; J – момент инерции; λ, μ, α, β, γ и ε – константы материала; x_i (i =1,2,3) – декартовы координаты.

Предположим, что в оболочке из псевдоконтинуума Коссера распространяется нестационарная волна (поверхность сильного разрыва) со скоростью G. Наряду с декартовыми координатами введём лучевые координаты s_1, s_2, ξ: s_1 – координата, направленная вдоль луча; s_2 – координата, направленная вдоль линии L, образованной пересечением фронта волны со срединной поверхностью оболочки, и ξ направлена вдоль нормали к срединной поверхности. Предполагается, что волна сильного разрыва в процессе своего распространения всё время остаётся перпендикулярной срединной поверхности оболочки.

Кроме лучевых координат введём в рассмотрение единичные векторы, связанные с лучевыми линиями: касательный вектор к лучевой линии $\boldsymbol{\lambda}\{\lambda_i\}$, векторы главной нормали $\xi\{\xi_i\}$ и бинормали $\boldsymbol{\tau}\{\tau_i\}$ к лучевой линии.

Записывая каждое уравнение системы (1)–(3) по обе стороны от волновой поверхности и беря разность соответствующих уравнений спереди и сзади от волновой поверхности Σ, получим

$$[\sigma_{ij}] = \lambda[u_{k,k}]\delta_{ij} + \mu([u_{i,j}] + [u_{j,i}]) + \alpha([u_{i,j}] - [u_{j,i}] - 2 \in_{kij} [\psi_k]), \tag{4}$$

$$[\mu_{ij}] = \beta[\psi_{k,k}]\delta_{ij} + \gamma\left([\psi_{i,j}] + [\psi_{j,i}]\right) + \varepsilon\left([\psi_{i,j}] - [\psi_{j,i}]\right), \tag{5}$$

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho[\dot{v}_i], [\mu_{ij,j}] + \in_{ijk} [\sigma_{jk}] = J[\dot{\omega}_i], \tag{6}$$

где $[Z] = Z^+ - Z^-$, а знаки «+» и «–» означают, что произвольная функция Z подсчитывается непосредственно перед и за волновой поверхностью Σ.

Будем интерпретировать волновую поверхность Σ как слой малой толщины δ, передний фронт которого приходит в некоторую точку M оболочки в момент времени t, а задний фронт приходит в ту же точку в момент времени $t + \Delta t$, где Δt мало. Используя условия совместности Адамара – Томаса [3] внутри этого слоя, получим

$$\sigma_{ij.j} = -G^{-1}\dot{\sigma}_{ij}\lambda_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_1}\lambda_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_2}\tau_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\xi}\xi_j, \tag{7}$$

$$\mu_{ij.j} = -G^{-1}\dot{\mu}_{ij}\lambda_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial s_1}\lambda_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial s_2}\tau_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial\xi}\xi_j. \tag{8}$$

Перепишем уравнения (3) и (4) внутри ударного слоя в виде

$$-G^{-1}\dot{\sigma}_{ij}\lambda_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_1}\lambda_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial s_2}\tau_j + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\xi}\xi_j = \rho\dot{v}_i, \tag{9}$$

$$-G^{-1}\dot{\mu}_{ij}\lambda_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial s_1}\lambda_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial s_2}\tau_j + \frac{\partial\mu_{ij}}{\partial\xi}\xi_j = \rho\dot{\omega}_i. \tag{10}$$

Фиксируя в соотношениях (9) и (10) координаты s_1, s_2 и ξ, затем интегрируя эти соотношения по времени от t до $t + \Delta t$ и устремляя Δt к нулю, приходим к динамическим условиям совместности:

$$[\sigma_{ij}]\lambda_j = -\rho G[v_i], [\mu_{ij}]\lambda_j = -JG[\omega_i]. \tag{11}$$

Записывая условия совместности для перемещений на фронте ударной волны и учитывая, что при отсутствии трещин $[u_i] = [\psi_i] = 0$, находим

$$[u_{i,j}] = -G^{-1}[v_i]\lambda_j + \left[\frac{\partial u_i\xi_j}{\partial\xi}\right], [\psi_{i,j}] = -G^{-1}[\omega_i]\lambda_j + \left[\frac{\partial\psi_i\xi_j}{\partial\xi}\right]. \tag{12}$$

Вторые члены в выражениях (12) оставлены для того, чтобы учесть в дальнейшем поперечную деформацию оболочки.

Учитывая соотношения (12), а также разложения величин по трём взаимно ортогональным единичным векторам λ_i, τ_i и ξ_i, получим

$$[v_i] = [\varsigma]\lambda_i + [\theta]\tau_i + [\eta]\xi_i, [\omega_i] = [\omega_\lambda]\lambda_i + [\omega_\tau]\tau_i + [\omega_\xi]\xi_i. \tag{13}$$

Перепишем соотношения (4) и (5) в виде

$$[\sigma_{ij}] = -G^{-1}\lambda[\varsigma]\delta_{ij} - G^{-1}\mu([v_i]\lambda_j + [v_j]\lambda_i) + G^{-1}\alpha([v_j]\lambda_i - [v_i]\lambda_j) + \\ +\mu\left(\left[\frac{\partial u_i\xi_j}{\partial\xi}\right] + \left[\frac{\partial u_j\xi_i}{\partial\xi}\right]\right) + \alpha\left(\left[\frac{\partial u_i\xi_j}{\partial\xi}\right] - \left[\frac{\partial u_j\xi_i}{\partial\xi}\right]\right) + \lambda[E_\xi]\delta_{ij}, \tag{14}$$

$$[\mu_{ij}] = -G^{-1}\beta[\omega_\lambda]\delta_{ij} - G^{-1}\gamma([\omega_i]\lambda_j + [\omega_j]\lambda_i) + G^{-1}\varepsilon([\omega_j]\lambda_i - [\omega_i]\lambda_j) + \\ +\gamma\left(\left[\frac{\partial\psi_i\xi_j}{\partial\xi}\right] + \left[\frac{\partial\psi_j\xi_i}{\partial\xi}\right]\right) + \varepsilon\left(\left[\frac{\partial\psi_i\xi_j}{\partial\xi}\right] - \left[\frac{\partial\psi_j\xi_i}{\partial\xi}\right]\right) + \beta[e_\xi]\delta_{ij}, \tag{15}$$

где

$$[E_\xi] = \left[\frac{\partial u_l\xi_l}{\partial\xi}\right], \qquad [e_\xi] = \left[\frac{\partial\psi_l\xi_l}{\partial\xi}\right]. \tag{16}$$

Чтобы определить величины (16), характеризующие поперечные деформации оболочки, используем выражения

$$[\sigma_{ij}]\xi_i\xi_j = [\mu_{ij}]\xi_i\xi_j = 0, \tag{17}$$

соответствующие условию ненадавливания слоёв оболочки друг на друга при прохождении фронта ударной волны.

Учитывая соотношения (17) и умножая выражения (14) и (15) на $\xi_i\xi_j$, получим

$$[E_\xi] = \frac{\lambda}{G(\lambda+2\mu)}[\varsigma],\ [e_\xi] = \frac{\beta}{G(\beta+2\gamma)}[\omega_\lambda].,\tag{18}$$

Определение скоростей нестационарных волн

Теперь приступим к определению характера распространяющихся в оболочке ударных волн и их скоростей. Если умножим уравнения (14) и (15) на $\lambda_i\lambda_j$ и учтём формулу (18), в результате получим

$$[\sigma_{ij}]\lambda_i\lambda_j = -\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{G(\lambda+2\mu)}[\varsigma],\ [\mu_{ij}]\lambda_i\lambda_j = -\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{G(\beta+2\gamma)}[\omega_\lambda]. \tag{19}$$

Присоединим к соотношениям (19) соотношения (11), умноженные на λ_i. В результате получим

$$[\sigma_{ij}]\lambda_j\lambda_i = -\rho G[\varsigma],\ [\mu_{ij}]\lambda_j\lambda_i = -JG[\omega_\lambda]. \tag{20}$$

Из выражений (19), а также из соотношений (20) находим

$$\left\{\rho G^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right\}[\varsigma] = 0,\ \left\{JG^2 - \frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\right\}[\omega_\lambda] = 0. \tag{21}$$

Из уравнений (19) следует, что на одной волне

$$G_1 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}, \qquad [\varsigma] = [v_i]\lambda_i \neq 0, \tag{22}$$

а на другой волне

$$G_2 = \sqrt{\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{J(\beta+2\gamma)}}\,, \qquad [\omega_\lambda] = [\omega_i]\lambda_i \neq 0\,. \tag{23}$$

Первую волну – Σ_1 – будем называть квазипродольной, а вторую волну $-\Sigma_2$ – главной квази-изгибно-крутильной. Если бы у нас была изотропная упругая оболочка, то в этом случае

$$\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = \frac{E}{1-\nu^2}\,, \tag{24}$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона, и скорость G_1 определялась бы известной формулой для продольной волны, распространяющейся в упругих пластинках и оболочках, а именно: $G_1 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$.

Далее, умножая соотношения (14) и (15) на $\lambda_j \xi_i$ и предполагая, что

$$\left[\frac{\partial u_j \lambda_j}{\partial \xi}\right] = \left[\frac{\partial \psi_j \lambda_j}{\partial \xi}\right] = 0, \tag{25}$$

имеем

$$[\sigma_{ij}]\lambda_j\xi_i = -G^{-1}(\mu+\alpha)[\eta],\ [\mu_{ij}]\lambda_j\xi_i = -G^{-1}(\gamma+\varepsilon)[\omega_\xi]. \tag{26}$$

Присоединим к формулам (26) выражения

$$[\sigma_{ij}]\lambda_j\xi_i = -\rho G[\eta],\ [\mu_{ij}]\lambda_j\xi_i = -JG[\omega_\xi], \tag{27}$$

которые получаются из динамических условий совместности (11) после умножения их на ξ_i. Решая совместно уравнения (26) и (27), находим

$$\{\rho G^2 - (\mu+\alpha)\}[\eta] = 0\,, \tag{28}$$

$$\{JG^2 - (\gamma+\varepsilon)\}[\omega_\xi] = 0\,, \tag{29}$$

откуда получаем две волны – Σ_3 и Σ_4:

$$G_3 = \sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}}\,, \qquad [\eta] = [v_i]\xi_i \neq 0\,, \tag{30}$$

$$G_4 = \sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}}\,, \qquad [\omega_\xi] = [\omega_i]\lambda_i \neq 0\,. \tag{31}$$

Если провести аналогичную процедуру с уравнениями (14) и (15), умножая их на $\lambda_j \tau_i$, и с уравнениями (11), умножая их на τ_i, то в результате получим те же самые две волны – Σ_3 и Σ_4, которые распространяются с теми же скоростями G_3 и G_4 и на которых выполняются дополнительные соотношения: $[\theta] \neq 0$ на Σ_3 и $[\omega_\tau] \neq 0$ на Σ_4. Иначе говоря, на волне Σ_3

$$G = G_3\,, \quad [\eta] = [v_i]\xi_i \neq 0\,, \quad [\theta] = [v_i]\tau_i \neq 0\,, \tag{32}$$

на волне Σ_4

$$G = G_4 \qquad [\omega_\xi] = [\omega_i]\xi_i \neq 0, \quad [\omega_\tau] = [\omega_i]\tau_i \neq 0. \tag{33}$$

Волну Σ_3 назовём квазисдвиговой, а волну Σ_4 – квази-изгибно-вращательной.

Приставка «квази» в названии волн означает, что каждая из этих волн наряду с основными компонентами содержит примесные компоненты всех других волн, но которые на порядок выше основных компонентов. Например, если на волне рвётся какая-либо величина, то на той же волне испытывают разрывы первые производные от всех других основных компонентов.

Из найденных значений четырёх скоростей нестационарных волн (поверхностей сильного разрыва) видно, что (1) они зависят только от констант материала и (2), что только один микрополярный модуль α, который определяет асимметрию тензора напряжений, влияет на скорость квазисдвиговой волны G_3, в то время как параметры Ламе λ и μ не оказывают влияния на скорости волн Коссера, то есть на скорости второй G_2 и четвёртой G_4 волн, которые зарождаются вследствие микрополярных вращений. Другими словами, математическая теория Коссера является несвязанной теорией (аналогичная ситуация имеет место в термоупругости, где существуют несвязанная и связанная теории).

ЛИТЕРАТУРА

1. Россихин, Ю. А. Аналитический обзор теорий типа Тимошенко для тонкостенных балок открытого профиля / Ю. А. Россихин, М. В. Шитикова // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – № 9. – С. 15-19.
2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий – М.: Мир, 1975. – 256 с.
3. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
4. Timoshenko, S. P. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken / S. P. Timoshenko // Zeitschrift fur Mathematik und Physik. – 1913. – Vol. 62. – №№ 1–4. – P. 198-209.
5. Rossikhin, Yu. A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica, 2007. – Vol. 189. – №№ 1-2. P. 87-121.
6. Rossikhin, Yu. A. The method of ray expansions for solving boundary-value dynamic problems for spatially curved rods of arbitrary cross-section / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica, 2008. – Vol. 200. – №№ 3-4. P. 213-238.
7. Rossikhin, Yu. A. Dynamic Response of Pre-Stressed Spatially Curved Thin-Walled Beams of Open Profile / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Springer Series «Springer Briefs in Applied Sciences and Technology». – 2011. – 86 p.
8. Rossikhin, Yu. A. Dynamic response of spatially curved thermoelastic thin-walled beams of generic open profile subjected to thermal shock / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Thermal Stresses. – 2012. – Vol. 35. – №№ 1–3. – P. 205-234.
9. Rossikhin, Yu. A. Thermal Shock upon Thin-Walled Beams of Open Profile / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Encyclopedia of Thermal Stresses. – 2014. – Springer. – Vol. 9. – P. 5146-5167.
10. Rossikhin, Yu. A. Transient wave velocities in pre-stressed thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Composites Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 83. – P. 323-332.
11. Rossikhin, Yu. A. A new approach for studying the transient response of thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Composite Structures. – 2017. – Vol. 169. – P. 153-166.
12. Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity / W. Nowacki. – Oxford: Pergamon Press, 1986. – 383 p.