



Панченко Г. Л.
G. L. Panchenko

РАЗЛИЧИЯ В УЧЁТЕ ВЯЗКОСТИ В ПРОЦЕССАХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

THE DIFFERENCES IN VISCOSITY ACCOUNTING IN CREEPING AND PLASTIC FLOW OF THE SPHERICAL LAYER MATERIAL UNDER CONDITIONS OF ALL-SIDED HYDROSTATIC COMPRESSION

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); доцент кафедры математики и моделирования Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Ms. Galina L. Panchenko – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); Associate professor, Mathematics and Modeling Department, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Аннотация. В работе в рамках модели больших упругопластических деформаций, учитывающей реологические свойства материалов, приводится решение краевой задачи о ползучести и вязкопластическом течении в сферическом слое под действием равномерного изменяющегося со временем давления. Рассчитаны обратимые, необратимые и полные деформации, напряжения и перемещения. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы в слое. Построены графики изменения граничных поверхностей сферического слоя.

Summary. The article gives a solution to the boundary-value problem in the framework of model of large elastoplastic deformations, taking into account the rheological properties of materials, about creeping and viscoplastic in a spherical layer under the action of a uniform pressure that varies with time. Reversible, irreversible and complete deformations, stresses and displacements are calculated. The regularity of the elastoplastic boundary in the layer is established. The graphs of the change in the boundary surfaces of a spherical layer are constructed.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вязкость, пластичность, большие деформации.

Key words: elasticity, creep, viscosity, plasticity, large deformations.

УДК 539.37

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-31-60017 мол_а_дк).

Введение

Формоизменение некоторых материалов, используемых в машиностроении, осуществляется способом холодной формовки в условиях ползучести [1]. В процессе обработки материала могут возникать области пластического течения, значительно влияющие на процесс его ползучести. На границах областей течения происходит смена механизма накопления необратимых деформаций, для изучения которого требуются новые постановки и решения краевых задач. Здесь в рамках модели больших деформаций [2; 3] рассмотрим задачу о возникновении пластического течения в окрестности внутренней границы сферического слоя, находящегося в условиях ползучести под действием всестороннего гидростатического сжатия.

Основные соотношения модели больших упругопластических деформаций

Основные соотношения запишем в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера x_i . Полагаем, что параметрами состояния деформируемого тела являются два симметричных тензора с компонентами e_{ij} и p_{ij} , которые характеризуют обратимые и необратимые деформации соответственно. Согласно используемой модели [3] эти тензоры определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса):

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} + z_{kj}) \right], \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \quad (1)$$

в которых

$$\begin{aligned} \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \\ v_i &= \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad r_{ij} = -r_{ji} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij} (\varepsilon_{sk}, e_{sk}). \end{aligned} \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; D/Dt – используемая объективная производная тензоров по времени, приведённая для произвольного тензора n_{ij} ; γ_{ij} – источник в уравнении переноса тензора необратимых деформаций p_{ij} . Нелинейная составляющая z_{ij} тензора вращений r_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} z_{ij} &= A^{-1} \left[(\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) C^2 + (\varepsilon_{ik} e_{ks} e_{sj} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{sj}) C + e_{ik} \varepsilon_{ks} e_{st} e_{ij} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{st} e_{ij} \right], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3} E_1^3 + \frac{1}{3} E_3, \quad C = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \end{aligned} \quad (3)$$

и её наличие связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций p_{ij} в процессах разгрузки. Из соотношений (1)–(3) получим связь тензоров e_{ij} и p_{ij} с тензором полных деформаций Альманси d_{ij} :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}). \quad (4)$$

Отметим, что в зависимости (4) обратимыми деформациями следовало бы называть компоненты $s_{ij} = e_{ij} - 1/2 e_{ik} e_{kj}$, так как при $p_{ij} \equiv 0$ из (4) следует, что $d_{ij} = s_{ij}$. Однако введение тензора с компонентами e_{ij} позволяет, во-первых, достаточно просто записать уравнения переноса (1) и, во-вторых, получить для упругопластической среды аналог формулы Мурнагана. Если считать материал несжимаемым и принять во внимание условие независимости плотности распределения свободной энергии от необратимых деформаций, то из закона сохранения энергии следует [3]

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (5)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши; p – добавочное гидростатическое давление; $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал, который для изотропной среды зададим в форме

$$W = W(J_1, J_2) = (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \quad (6)$$

$$J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ji}.$$

В зависимости (6) μ – модуль сдвига; a, b, ξ, χ – упругие модули более высокого порядка.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов и для его конкретизации зададим скорости необратимых деформаций γ_{ij} .

Считаем, что вязкие свойства среды проявляются на всех этапах процесса деформирования. Необратимые деформации p_{ij} накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями.

В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортона [7]:

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2)}^{1/2}, \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; ε_{ij}^v – скорости деформаций ползучести; B, n – заданные параметры ползучести материала. При достижении напряжённым состоянием поверхности нагружения диссипативный механизм меняется, начинается пластическое течение. Источником γ_{ij} необратимых деформаций p_{ij} в развивающейся области пластического течения являются теперь скорости пластических деформаций $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$. Согласно принципу максимума Мизеса связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

В качестве пластического потенциала будем использовать условие текучести Треска, обобщённое на случай учёта вязких свойств материала [4; 5]:

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_n^p - \alpha_n|, \quad (9)$$

в котором k – предел текучести; η – коэффициент вязкости; ε_n^p – главные значения тензора скоростей пластических деформаций.

Предположим, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (7) являются начальными значениями для накапливающихся в области течения пластических деформаций. Для выполнения данного условия требуется также совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования (7) на (8). Таким образом, в соотношениях (8) и (9)

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^{v_0}, \quad \alpha_n = \varepsilon_n^{v_0}. \quad (10)$$

В (10) $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения; $\varepsilon_n^{v_0}$ – его главные значения.

Деформирование материала до начала вязкопластического течения

Пусть несжимаемый материал, деформационные свойства которого удовлетворяют вышеописанным соотношениям, расположен в слое между двумя сферическими поверхностями с радиусами $r = s(t)$ и $r = R(t)$ ($s(t) \ll R(t)$) и общим центром. Процесс деформирования материала свяжем со следующими нагружающими усилиями:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0. \quad (11)$$

Здесь σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, φ, θ ; $P(t)$ – возрастающая со временем функция. Принимаемое условие несжимаемости задаёт кинематику среды с точностью до произвольной функции времени $h(t)$ такой, что

$$u = u_r = r - \left(r^3 + h(t) \right)^{\frac{1}{3}}, \quad h(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t). \quad (12)$$

В зависимостях (12) s_0, R_0 – значения функций $s(t)$ и $R(t)$ в свободном состоянии среды; $u = u_r$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений. Согласно полю перемещений (12) из (4) найдём компоненты тензора полных деформаций Альманси:

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - H^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - 2d_{rr}^{-1/2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - H^{2/3} \right), \quad H = 1 + r^{-3}h(t). \quad (13)$$

Из (1)–(4) найдём компоненты обратимых e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ и необратимых $p_{\theta\theta}$ деформаций, а также скоростей деформаций ползучести ε_{rr}^v и $\varepsilon_{\theta\theta}^v$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^v = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \\ e_{rr} &= 1 - H^{-2/3} (1 - 2p_{rr})^{-1/2}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - H^{1/3} (1 - 2p_{rr}), \\ p_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2p_{rr}}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ определяются из соотношения (5) через компоненты тензора обратимых деформаций e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления $p(r, t)$. В свою очередь, компоненты e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ связаны с компонентой тензора необратимых деформаций $p_{rr}(r, t)$ зависимостями (14). Используя (5), (14), из закона Нортон (7) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Phi^{n-1}(e_{rr}, e_{\theta\theta}), \quad (15)$$

в котором $\Phi(e_{rr}, e_{\theta\theta}) = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ и функция $\Phi(y_1, y_2)$ определяется через y_1 и y_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(y_1, y_2) &= 2\mu(y_1 - y_2) - \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_1^3 - \lambda_4 y_2^3 + \\ &+ \lambda_5 \left(\frac{1}{2} y_1 y_2^2 - y_1 y_2 \right) + \lambda_6 \left(y_1^2 y_2 - \frac{1}{2} y_1^2 y_2^2 \right) - \lambda_7 y_1^4 + \lambda_8 y_2^4 + \\ &+ \lambda_9 \left(y_1^4 y_2 + 2y_1^3 y_2^2 - \frac{1}{2} y_1^4 y_2^2 - 4y_1^3 y_2 \right) + \lambda_{10} \left(\frac{1}{2} y_1^6 - 3y_2^5 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Постоянные $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ в формуле (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu + 4a + 4b + 2\xi, & \lambda_2 &= \mu + 4a + 8b + 4\xi, \\ \lambda_3 &= 2(2a + 2b + 4\xi + 3\chi), & \lambda_4 &= 4(a + 2b + 4\xi + 6\chi), \\ \lambda_5 &= 4b + 2\xi, & \lambda_6 &= 2b + 7\xi + 18\chi, & \lambda_7 &= a + b + \frac{19}{2}\xi + 9\chi, \\ \lambda_8 &= a + 2b + 19\xi + 36\chi, & \lambda_9 &= \frac{3}{4}(\xi + 3\chi), & \lambda_{10} &= \frac{1}{2}(5\xi + 11\chi). \end{aligned}$$

Уравнение (15) связывает две неизвестные функции $p_{rr}(r, t)$ и $h(t)$. Второе уравнение для этих функций получим из уравнения равновесия, проинтегрировав его в области деформирования $s(t) \leq r \leq R(t)$ с учётом краевых условий (11):

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Phi(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr = P(t). \quad (17)$$

Таким образом, для оставшихся неизвестных функций $p_{rr}(r, t)$ и $h(t)$ из (14), (15) и (17) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Psi(r, p_{rr}(r, t), h(t))}{r} dr = P(t), \quad \frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Psi^{n-1}(r, p_{rr}(r, t), h(t)). \quad (18)$$

В системе (18) введено обозначение

$$\Psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) = \Phi \left(1 - H^{-\frac{2}{3}}(1 - 2p_{rr})^{-\frac{1}{2}}, 1 - H^{-\frac{1}{3}}(1 - 2p_{rr}) \right).$$

Система (18) при начальных условиях $h(0) = 0, p_{rr}(r, 0) = 0$ решается численно с использованием конечно-разностного метода и составной формулы трапеций [6]. Полученное решение при возрастающем давлении $P(t)$ справедливо лишь до того момента времени $t = t_1$, до которого на внутренней границе слоя $s_1 = s(t_1)$ напряжённое состояние не достигнет поверхности нагружения (9), в нашем случае принимающего следующий вид:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})_{r=s_1} = \Psi(s_1, p_{rr}(s_1, t_1), h(t_1)) = 2k.$$

Вязкопластическое течение

С момента времени $t = t_1$ при дальнейшем увеличении функции $P(t)$ в области $s(t) \leq r \leq m(t)$ идёт процесс вязкопластического течения, а в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ по-прежнему происходит вязкоупругое деформирование. Граница $r = m(t)$, разделяющая данные области, является движущейся границей области вязкопластического течения.

Из (1)–(4) и (9) в области течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ имеем

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k + \frac{3\eta}{2} (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{rr}^{v0}), \quad \varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}. \quad (19)$$

Из соотношений (19) получим дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные функции $p_{rr}(r, t)$ в области $s(t) \leq r \leq m(t)$, $h(t)$ и $m(t)$:

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{2}{3\eta} (1 - 2p_{rr}) [\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) - 2k] + Bn2^{n-1} k^{n-1} (1 - 2p_{rr}). \quad (20)$$

В области $m(t) \leq r \leq R(t)$ остаётся верным второе уравнение (18). При этом первое уравнение из (18) выполняется во всём слое.

Из того, что $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})|_{r=m(t)} = 2k$, следует уравнение

$$\psi(m(t), p_{rr}(m(t), t), h(t)) = 2k. \quad (21)$$

Таким образом, из (18), (20) и (21) следует система интегро-дифференциальных уравнений для функций $p_{rr}(r, t)$, $h(t)$ и $m(t)$:

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t))}{r} dr = P(t),$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\psi^{n-1}(r, p_{rr}(r, t), h(t)), \quad m(t) \leq r \leq R(t),$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{2}{3\eta} (1 - 2p_{rr}) [\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) - 2k] + Bn2^{n-1} k^{n-1} (1 - 2p_{rr}), \quad s(t) \leq r \leq m(t),$$

$$\psi(m(t), p_{rr}(m(t), t), h(t)) = 2k.$$

По найденным значениям необратимых деформаций p_{rr} и функций $h(t)$ и $m(t)$ найдём компоненты полных, обратимых и необратимых деформаций из (13) и (14), перемещения – из (12).

Для расчётов использовались линейная функция $p(t) = \beta t$ и следующие значения постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3 / \beta = 3,5$, $a / \mu = 0,9$, $b / \mu = 4$, $\xi / \mu = 20$, $\chi / \mu = 80$, $s_0 / R_0 = 0,03$, $k / \mu = 0,003$, $\mu^2 / (\beta\eta) = 0,14$.

На рис. 1, а и б, показаны распределения необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ и обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою, а рис. 2, а и б, иллюстрирует распределения напряжений σ_{rr} / μ , $\sigma_{\varphi\varphi} / \mu$ и перемещений u / R_0 в момент времени τ_2 .

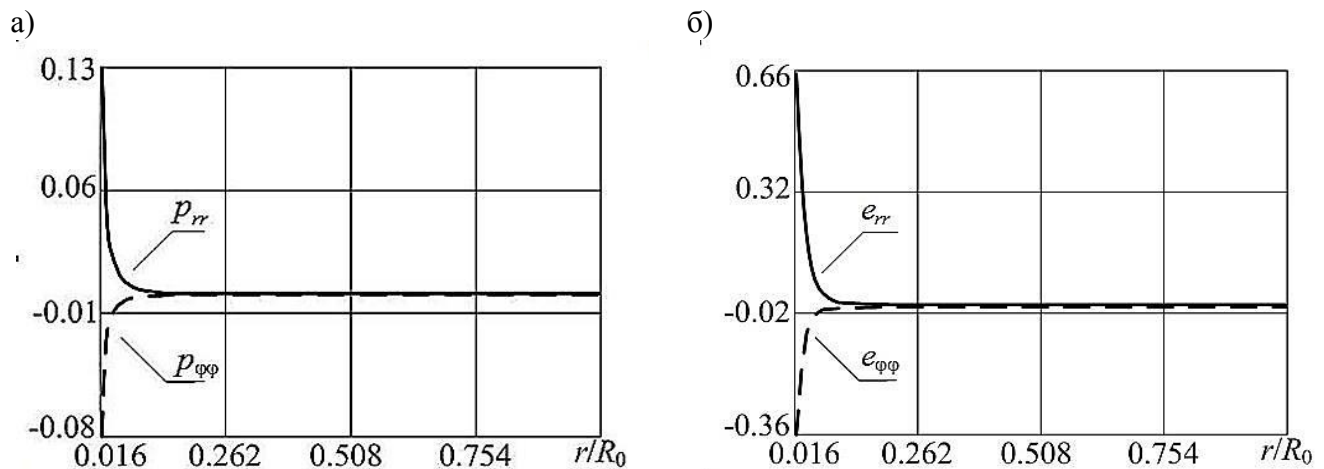


Рис. 1. Распределение деформаций по слою: а – необратимых; б – обратимых

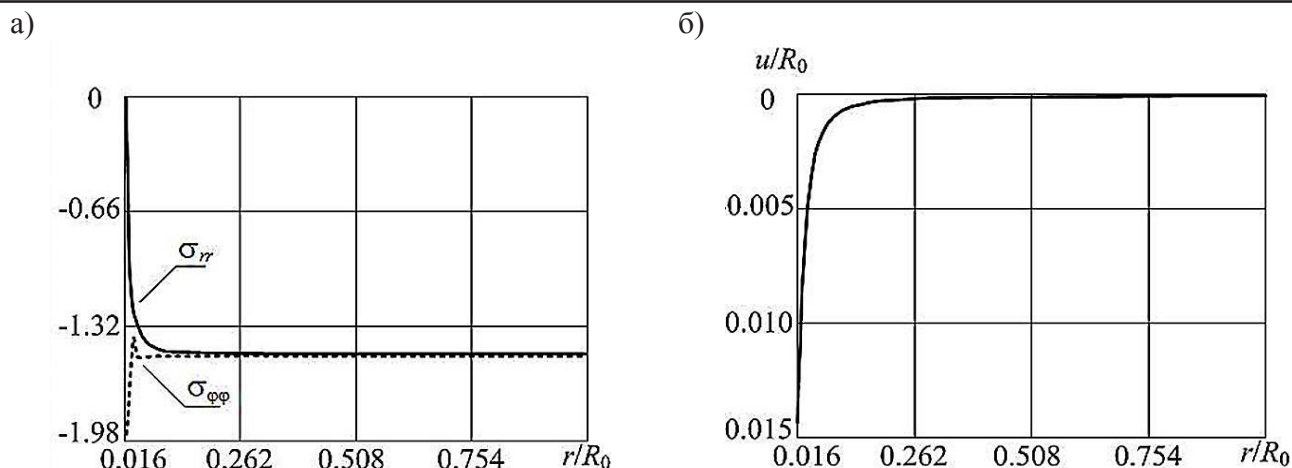


Рис. 2. Графики зависимости от радиуса: а – напряжений; б – перемещений

Заключение

В работе получено решение краевой задачи теории больших деформаций о вязкопластическом течении материала сферического слоя с предварительно накопленными необратимыми деформациями ползучести. Получены зависимости упругопластической границы и граничных поверхностей от времени; найдены распределения обратимых, необратимых и полных деформаций, напряжений и перемещений по слою в разные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш. – М.: Эком, 2009. – 109 с.
2. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201.
3. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
4. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
5. Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.
6. Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
7. Norton, F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y.: Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.