

Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г.
M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, G. G. Berdzenishvili

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСЧЁТА ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА

CALCULATION OF THE THERMOPLASTIC STATE OF A DISC

Артемов Михаил Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Mikhail A. Artemov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Барановский Евгений Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Evgeny S. Baranovsky – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Бердзенишвили Георгий Геннадиевич – преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Geogriy G. Berdzenishvili – Lecturer, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Аннотация. Приведено точное решение задачи о напряжённом состоянии в материале тонкого круглого упругопластического диска при термомеханическом воздействии. Считается, что температура в центральной части диска однородна и задана, а внешняя кромка нагружена задаваемыми радиальными усилиями и поддерживается при постоянной комнатной температуре. С учётом статической определимости такой задачи указаны условия на задаваемые параметры, при которых в разных областях диска возможны пластические состояния. Приведены сравнения в таких условиях в зависимости от выбора условий пластического течения как классических, так и кусочно-линейного общего вида.

Summary. An exact solution of the problem of the stressed state in the material of a thin, circular, elastoplastic disk is given under thermomechanical force. It is believed that the temperature in the central part of the disk is uniform and specified, and the outer edge is loaded with a given radial force and is maintained at a constant room temperature. Taking into account the static definability of such a problem, conditions are specified for the given parameters, at which plastic states are possible in different areas of the disk. Comparisons are made under such conditions, depending on the choice of conditions for the plastic flow of both classical and piecewise linear general form.

Ключевые слова: упругость, пластичность, идеальное пластическое течение, температурные напряжения.
Key words: elasticity, plasticity, ideal plastic flow, temperature stresses.

УДК 539.374

Математическому моделированию напряжённого и деформированного состояний дисков, испытывающих кинематическое, силовое и тепловое воздействия, посвящено немало работ. Практически во всех последних публикациях учитываются зависимости параметров тел от температуры, как, например, в [8 – 13].

Постановка задачи

Рассматривается тонкий круговой диск, подверженный полярно симметричному тепловому и силовому воздействиям. Поле температур центральной части диска $0 \leq r \leq a$ является однородным $T = T_a$. На внешней границе диска задано давление p_b и температура $T_b = 0$.

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбран предел пластичности k при начальной температуре, а в качестве масштаба длины выбран радиус a . Для безразмерных величин принято обозначение размерных величин, что не привносит путаницу, поскольку не вводятся безразмерные комплексы. Все величины являются усреднёнными по толщине диска.

Для определения напряжённого, деформированного и температурного состояний диска выбирается цилиндрическая система координат, ось которой перпендикулярна срединной поверхности диска и является осью симметрии диска.

Для несвязной термомеханической задачи поле температур определяется по формуле [1]:

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, & a < r \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Упругое состояние

Обозначим через c_i, c_e радиусы границ области, в которой диск находится в упругом состоянии, через p_i и p_e – давления на этих границах. В этой области компоненты тензора напряжений представлены в формулах [1]:

$$\sigma_r = -\frac{T_a \alpha E}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr + A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = T_a \alpha E \left(\frac{1}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr - f \right) + A + \frac{B}{r^2}, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{p_i c_i^2 - p_e c_e^2}{c_e^2 - c_i^2}, \quad B = \frac{c_i^2 T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{c_i^2 c_e^2 (p_i - p_e)}{c_e^2 - c_i^2}. \quad (3)$$

При решении рассматриваемой упругопластической задачи, если имеется пластическая зона, напряжения в зоне упругого состояния можно определять из решения начальной задачи. Полагая, что на упругопластической границе $\sigma_r|_{r=c_i} = -p_i$, $\sigma_\varphi|_{r=c_i} = \sigma_{i\varphi}$, находим: $A = \frac{1}{2}(\alpha T_a E f_i - p_i + \sigma_{i\varphi})$,

$$B = \frac{c_i^2}{2}(\alpha T_a E f_i + p_i + \sigma_{i\varphi}), \quad f_i = f|_{r=c_i}.$$

Переход диска в упругопластическое состояние

Задача плоского напряжённого состояния идеального упругопластического тела в области пластического состояния является статически определимой. Поэтому, если граничные условия не содержат перемещений, то определение напряжений не зависит от деформированного состояния. Анализ упругого напряжённого состояния диска показывает, что в зависимости от величины радиуса диска в процессе нагружения зарождение пластической области может происходить или на границе $r = a$, или на границе $r = b$, или на границах $r = a$ и $r = b$ одновременно.

Будем полагать, что для всех условий пластичности общим является предел пластичности на одноосное растяжение.

В области $0 \leq r \leq a$ реализуется однородное напряжённое состояние $\sigma_r = \sigma_\varphi$, поэтому в этой части диска при переходе в пластическое состояние для любого условия пластичности будет выполняться режим $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k$. Из формул (1)–(3) (полагая $c_i = 0$, $c_e = b$, $p_e = p_b$) следует, что указанный переход выполняется, если

$$T_a = T_{in} = 2b^2(k_0 - p_b) / \left(2b^2 k_0 \xi + \alpha E \left(b^2 - a^2 - 2 \int_a^b f r dr \right) \right).$$

Если давление $p_b = 0$, то для любого условия пластичности на границе $r = b$ напряжения $\sigma_r = 0$, $\sigma_\varphi = k_0$. Температура T_a , при которой в пластическое состояние переходит только граница $r = b$, имеет вид $T_a = T_{ex} = (b^2 k_0) / \left(2\alpha E \int_0^b r f dr \right)$.

Рассмотрим случай, когда выбирается кусочно-линейное условие пластичности общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z \} &= k = k_0 (1 - \xi T), \\ \sigma_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если на границе $r = b$ давление $p_b \neq 0$ и выполняется режим пластичности $\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r = k_0$, то $T_a = T_{ex} = b^2 ((\alpha_i + \beta_i) p_b + k_0) / \left(2\alpha E \int_0^b r f dr \right)$; для условия пластичности Мизеса имеем

$$T_a = T_{ex} = \frac{\left(p_b + \sqrt{4k_0^2 + 3p_b^2} \right) b^2}{2\alpha E \left(a^2 + 2 \int_a^b r f dr \right)}.$$

Когда общим выбирается не предел пластичности на одноосное растяжение, то алгоритм вычисления величин T_{in} и T_{ex} остаётся прежним, но формулы для их вычисления будут иными.

Равенство $T_{in} = T_{ex}$ позволяет определить радиус диска $b = b_k$, для которого одновременно на границах $r = a$ и $r = b$ зарождается пластическая область.

На рис.1, а, б и в, приведены графики T_{ex} и T_{in} до точки их пересечения $b = b_k$ при выборе условия пластичности Треска (сплошная линия), Шмидта – Ишлинского (точечная линия) и Мизеса (пунктирная линия). При выполнении всех численных расчётов выбраны следующие значения безразмерных параметров модели: $k_0 = 1$, $a = 1$, $\alpha E = 0,012$.

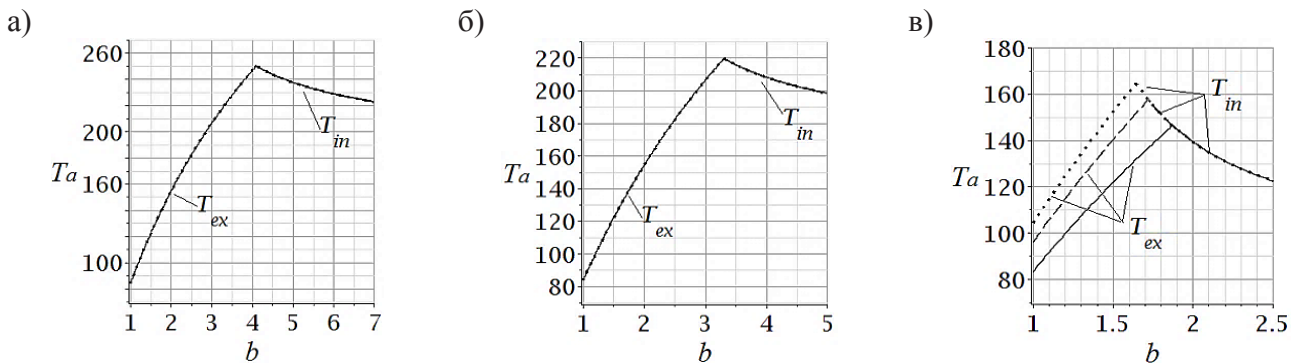


Рис. 1. Зависимость температур T_{ex} и T_{in} от радиуса диска для разных значений параметров:
 а – $p_b = 0$, $\xi = 0$; б – $p_b = 0$, $\xi = 0,0008(3)$; в – $p_b = 0,5$, $\xi = 0,0008(3)$

Результаты, представленные на рис.1, показывают следующее: 1) когда $b \leq b_k$ и $T_a = T_{ex}$, только граница диска $r = b$ переходит в пластическое состояние; 2) когда $b_k < b$ и $T_a = T_{in}$, только область $0 \leq r \leq a$ переходит в пластическое состояние; 3) когда $b = b_k$ и $T_a = T_{ex} = T_{in}$, в пластическое состояние переходит область $0 \leq r \leq a$ и граница диска $r = b$.

Также можно ввести следующую классификацию: 1) диски малого радиуса, когда $b < b_k$; 2) диски большого радиуса, когда $b_k < b$; 3) диски среднего радиуса, когда $b = b_k$.

При введении дополнительных условий предложенную классификацию дисков можно изменить. Например, можно найти такие значения $b = b_1 < b_k$ и $T_a = T_1$, для которых в пластическом состоянии будут находиться две области: внутренняя $0 \leq r \leq a$ и внешняя $c_e \leq r \leq b$, где c_e находится из некоторого определяемого условия. Тогда можно говорить о дисках малого радиуса, когда $b < b_1$, и о дисках среднего радиуса, когда $b_1 \leq b \leq b_k$. Так, если выбрано условие пластичности Шмидта – Ишлинского и $0 \leq p_b < 2/3k_0$, то b_1 и T_1 можно рассматривать как значения, для которых на границе $r = c_e$ выполняется условие смены режима пластичности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi - 0,5\sigma_r &= k, \\ 0,5\sigma_\varphi - \sigma_r &= k. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для идеального пластического тела в области пластического состояния диска задача определения напряжений будет статически определимой [14]; она является начальной задачей для радиальной компоненты тензора напряжений.

Если рассматривается модель неидеального пластического тела, то в пластической области получаем статически неопределимую задачу.

Напряжения в зонах пластического состояния для условия пластичности (4) будут определяться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left(\ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) + C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left(\ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где C_i находится из условия $\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i$, которое является или граничным, или следует из условия непрерывности напряжений.

Особо следует выделить условие пластичности Треска. Режимы этого условия пластичности соответствуют случаям: $\alpha_i + \beta_i = 0$, $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$. Для нахождения напряжений в пластической области необходимо выполнить предельный переход в формулах (6). Однако проще получить искомые формулы, непосредственно решая начальную задачу для указанных режимов пластичности.

В случае когда $\alpha_i + \beta_i = 0$, то

$$\sigma_r = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left(\frac{\xi T_a \ln(b/r)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + C_i, \quad \sigma_\varphi = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left(\frac{\xi T_a (\ln(b/r) - 2)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + \frac{k_0}{\alpha_i} + C_i.$$

Когда $\alpha_i = 0$, из условия пластичности следует, что $\sigma_r = \frac{k_0}{\beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a \ln(b/r)}{\ln(b/a)} \right)$ и из уравнения

равновесия $\sigma_\varphi = \frac{k_0}{\beta_i} \left(1 + \frac{\xi T_a (1 - \ln(b/r))}{\ln(b/a)} \right)$.

Эквивалентное напряжение

Для оценки напряжённого состояния определяем эквивалентные напряжения, которые связываем с условием пластичности. Для каждого i -го режима кусочно-линейное условие пластичности имеет следующий вид: $\sigma_{eq} = \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r$.

Внутренняя пластическая область

Если $b > b_k$ и $T_{in} < T_a$, то в области диска $0 \leq r \leq a$ реализуется режим полной пластичности: $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k_a$, $k_a = k_0(1 - \xi T_a)$. Несложно проверить, что для условия пластичности Треска в обла-

сти $a \leq r \leq c_i$ из возможных режимов пластичности реализуется режим $\sigma_\varphi = -k_0(1 - \xi T)$, $-k_0(1 - \xi T_a) \leq \sigma_r \leq 0$, для которого $\sigma_r = -k - k_0 \xi T_a (1 - a/r) / \ln(b/a)$, $\sigma_\varphi = -k$. Для области диска $c_i \leq r \leq b$, находящейся в упругом состоянии, в формуле (3) надо полагать $c_e = b$, $p_e = p_b$. Радиус упругопластической границы $r = c_i$ определяется, например, из условия непрерывности окружного напряжения на этой границе (квадратные скобки используем для обозначения скачка величин при переходе через границу): $[\sigma_\varphi]_{r=c_i} = 0$. Значение температуры $T_a = T_1$, при которой на границе $r = b$ области упругого состояния диска, будет выполняться условие $\sigma_\varphi - \sigma_r = k$ ($0 \leq pb$).

На рис. 2, а, б и в, приведены графики распределения напряжений, эквивалентного напряжения для возможных режимов пластичности условия Треска и годографа вектора напряжений. Выбраны следующие значения параметров: $T_a = 340$, $\xi = 0,0008$, $c_i = 2,1$.

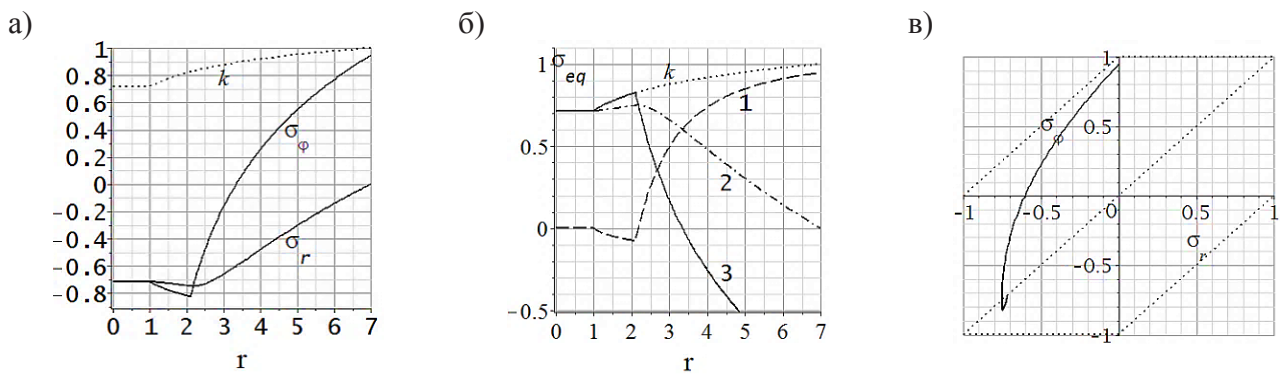


Рис. 2. Графики: а – распределения радиального, окружного напряжений и предела пластичности; б – эквивалентных напряжений для режимов пластичности 1 \rightarrow $\sigma_\varphi - \sigma_r$, 2 \rightarrow $-\sigma_r$, 3 \rightarrow $-\sigma_\varphi$; в – годографа напряжений

Две пластические области

На рис. 3, а, б, в, показаны графики распределения напряжений, эквивалентного напряжения для возможных режимов пластичности условия Шмидта – Ишлинского и годографа вектора напряжений для диска малого радиуса $b < b_k$. Выбраны следующие значения параметров: $T_a = T_1 = 336,69$; $b = b_1 = 2,25$; $c_e = 1,34$; $p_b = 0$. В пластическом состоянии находится ядро диска $0 \leq r \leq a$ и область $c_e \leq r \leq b$. На границе $r = c_e$ выполняется сингулярный режим пластичности (5).

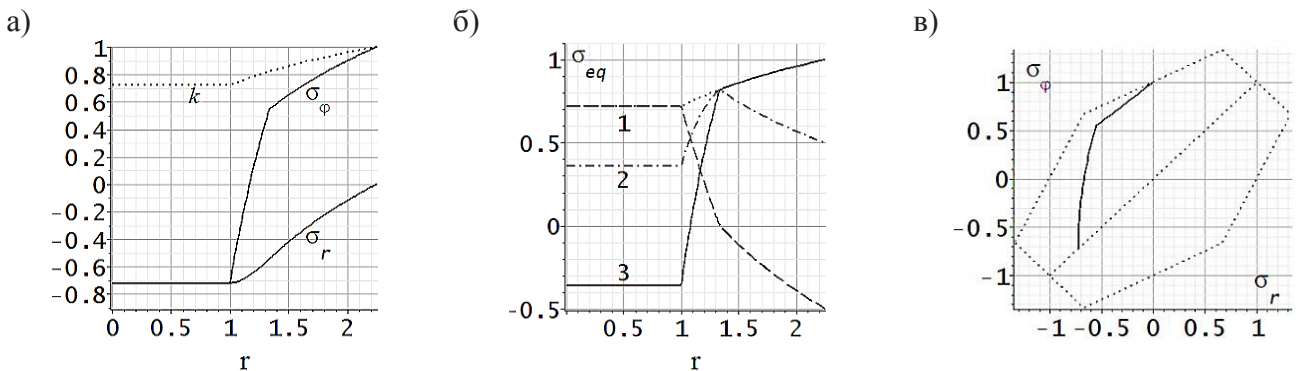


Рис. 3. Графики: а – распределения радиального, окружного напряжений и предела пластичности; б – эквивалентных напряжений для режимов пластичности 1 \rightarrow $\sigma_\varphi - \sigma_r$, 2 \rightarrow $-\sigma_r$, 3 \rightarrow $-\sigma_\varphi$; в – годографа напряжений



Алгоритмы решения задачи для иных режимов пластичности и дисков малых и средних радиусов для других условий пластичности не имеют принципиальной оригинальности по отношению к рассмотренному примеру. Зная напряжённое состояние, определение деформационного состояния можно свести к использованию известных определяющих соотношений.

Вопросы, связанные с процессом разгрузки тел цилиндрической формы, подробно рассматривались в работах А. А. Буренина и его учеников [3 – 7] и поэтому в настоящей статье не затрагиваются.

Выводы

Вид формулы для напряжений и деформаций зависит от выбранного алгоритма решения задачи. Все различные формулы для конкретной величины приводимы одна к другой. Графики для эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений используем для контроля полученного решения для напряжённого состояния. Вопросы построения алгоритма решения рассмотренной выше конкретной задачи характерны для большинства аналогичных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. О напряжённом состоянии тонкого диска с учётом зависимости предела текучести от температуры / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Г. Г. Бердзенишвили, И. И. Переславская // Инженерный сборник Дона. – 2017. – № 3. – С. 1-8.
2. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
3. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
4. Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе нагрева охлаждения / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2013. – № 2. – С. 22-28.
5. Буренин, А. А. К моделированию технологии горячей посадки / А. А. Буренин, Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 40-47.
6. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 2. – С. 124-131.
7. Дац, Е. П. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учёте пластических течений / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 208-216.
8. Mack, W. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle / W. Mack, U. Gamer // Forschung im Ingenieurwesen. – 1985. – № 5(51). – P. 160-164.
9. Orcan, Y. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder / Y. Orcan // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90. – P. 61-80.
10. Bengeri, M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit / M. Bengeri, W. Mack // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103. – P. 243-257.
11. Arslan, E. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft / E. Arslan, W. Mack, A. N. Eraslan // Acta Mechanica. – 2008. – Vol. 195. – P. 129-140.
12. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // Proceedings of the World Congress on Engineering. – 2016. – Vol 1. – P. 69-72.
13. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. – 2016. – Vol. – 2223. – P. 69-72.
14. Timoshenko, S. R. Theory of elasticity / S. R. Timoshenko. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 428 p.