Андрианов И. К.
I. K. Andrianov

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛОВОГО И СИЛОВОГО НАГРУЖЕНИЯ

NUMERICAL MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION MODEL OF THE SHELL THERMAL PROTECTION UNDER CONDITIONS OF THERMAL AND FORCE LOADING

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Общая физика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); Россия, 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Ivan K. Andrianov – PhD in Engineering, Associate Professor, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); Russia, 681013, Komsomolsk-on-Amur, Lenin Ave., 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Аннотация. Представлена численная формулировка задачи многокритериальной оптимизации тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения с нелинейными ограничениями. Система ограничений учитывает теплопроводность оболочки с теплозащитным слоем, газодинамику процесса охлаждения. На основании метода множителей Лагранжа построена численная модель расчёта конкурирующих параметров тепловой защиты: теплового состояния оболочки, толщины покрытия, теплоотдачи, расхода и скорости охладителя. Оптимизация параметров оболочки проводилась с учётом ограничений на тепловое и напряжённое состояние. Для установления значимости каждого из критериев определены весовые коэффициенты и численно получены множества эффективных решений, доставляющих минимум целевой функции оптимизации.

Summary. A numerical formulation of the multi-criteria optimization problem with nonlinear constraints is presented. The system of restrictions takes into account the thermal conductivity of the shell with heat-shielding layers, the gas dynamics of the cooling process. Based on the method of Lagrange multipliers, a numerical model is constructed for calculating competing parameters of thermal protection: the thermal state of the shell, coating thickness, heat transfer, flow rate and speed of the cooler. Optimization of the shell parameters was carried out taking into account the restrictions on the thermal and stress state. To determine the significance of each of the criteria, weight coefficients are determined and sets of effective solutions are numerically obtained that provide a minimum of the optimization objective function.

Ключевые слова: метод множителей Лагранжа, численная модель, оптимальность по Парето, турбинная лопатка, весовые коэффициенты, теплоотвод.

Key words: Lagrange multiplier method, numerical model, Pareto optimality, turbine vane, weight coefficients, heat sink.

УДК 51-74

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Хабаровского края, грант № 72с/2020 от 24 августа 2020 года «Разработка модели многокритериальной оптимизации конкурирующих параметров тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения».

На сегодняшний день развитие турбомашиностроения направлено на повышение производительности работы и снижение расходов на тепловую защиту основных рабочих элементов. Соответственно, актуальным представляется исследование вопросов теплового состояния нагружаемых элементов и их охлаждения с учётом вопросов оценки прочностного ресурса. Стоит отметить, что данное исследование в большей степени направлено на оптимизацию охлаждения турбинных лопаток, испытывающих силовое и тепловое воздействие. Методы оптимизации охлаждения турбинных лопаток за счёт применения фильтрационного, ячеистого охлаждения, уменьшения расхода хладагента, а также модели газодинамики исследованы в работах [1; 3; 5; 6; 13; 17; 22]. Современные вопросы теплопереноса рассмотрены в работе [12]. Поскольку оптимизация производства сопровождается использованием в качестве рабочих элементов оболочек и пластин, широкое исследование получили задачи термомеханического анализа, связанные с оценкой напряжённо-деформированного состояния при нагреве и охлаждении, моделировании термонапряжённого состояния в условиях многослойности, что отражено в работах [2; 3; 8; 9; 10].

Поскольку описание тепловой защиты оболочечных элементов затрагивает вопросы теплопереноса, газодинамики, напряжённого состояния, то весьма важным представляется применение методов многокритериальной оптимизации. Современный вопрос численного решения задач многомерной оптимизации является актуальным ввиду громоздкости и нелинейности систем уравнений, описывающих математическую задачу. При описании реальных процессов оптимизация целевой функции должна удовлетворять системе ограничений, в связи с чем достаточно эффективным инструментом при решении является метод множителей Лагранжа, используемый в задачах условной оптимизации с нелинейными ограничениями. Методы вариации множителей Лагранжа, оптимизация нагрузок с помощью данного метода рассмотрены в работах [4; 16; 21]. Алгоритмы учёта нелинейностей систем уравнений рассмотрены в работе [7]. Применение метода множителей Лагранжа также активно используется в расчёте турбин [18].

Проблемы многокритериальной оптимизации нашли рассмотрение при решении обратных задач, задач тепловой изоляции выбора состава материала, что исследовано в работах [11; 15; 20]. Вопросы турбомашиностроения, совершенствования конструкций турбин исследованы в работах [6; 7; 14]. Применение методов многокритериальной оптимизации в расчёте многорежимности работы турбин рассмотрено в исследовании [19].

Цель данного исследования заключалась в проведении численного расчёта оптимальных по Парето значений параметров тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения на основании обобщённого критерия оптимизации. Частными критериями оптимизации являются температурное поле оболочки T_{s0} с ограничениями по длительной прочности, массовый расход хладагента G, теплоотдача α_r и скорость v охладителя, а также толщина теплоизоляционного покрытия δ_c. Поскольку математическая постановка задачи исследования описывается нелинейной целевой функцией минимизации с нелинейными ограничениями, численное решение предлагается рассмотреть с помощью метода множителей Лагранжа. Также требуется рассмотреть несколько эффективных решений задачи при различных весовых коэффициентах $\beta_i, i = \overline{1,5}$ частных критериев.

В задаче требуется найти точку $\left\{T_{s0}^{(k)}, G^{(k)}, \delta_c^{(k)}, v^{(k)}, \alpha_r^{(k)}\right\}$, которая доставляет эффективное решение целевой функции Δ, где k – одно из множества эффективных решений, оптимальных по Парето:

$$\Delta = \beta_1 \theta\left(T_{s0} - T_{s0}^{(0)}\right)\left(\frac{T_{s0} - T_{s0}^{(0)}}{T_{s0}^{(0)}}\right)^{2[1+p\theta(T_{s0}-T_{s0}^{*})]} + \beta_2 \theta\left(G - G^{(0)}\right)\left(\frac{G - G^{(0)}}{G^{(0)}}\right)^{2[1+\theta(G-G^{*})p]} +$$

$$+ \beta_3 \theta\left(\delta_c - \delta_c^{(0)}\right)\left(\frac{\delta_c - \delta_c^{(0)}}{\delta_c^{(0)}}\right)^{2[1+\theta(\delta_c-\delta_c^{*})p]} +$$

$$+ \beta_4 \theta\left(v - v^{(0)}\right)\left(\frac{v - v^{(0)}}{v^{(0)}}\right)^{2[1+\theta(v-v^{*})p]} + \beta_5 \left(\frac{\alpha_r^{(0)}}{\alpha_r - \alpha_r^{(0)}}\right)^{2} \to \min,$$

где p – штрафной коэффициент; θ – функция Хевисайда; x^* – верхняя граница частного критерия $x = \{T_{s0}, G, \delta_c, v, \alpha_r\}$.

Примем в качестве начального приближения некоторое допустимое решение $\left\{T_{s0}^{(0)}, G^{(0)}, \delta_c^{(0)}, v^{(0)}, \alpha_r^{(0)}\right\}$, подлежащее улучшению многокритериальной задачи. Постановка задачи теплообменного процесса описывается следующей системой:

- дифференциальные уравнения теплопроводности для оболочки и теплозащитного слоя

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_c}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} = 0; \tag{2}$$

- граничные условия на поверхности нагрева и охлаждения:

$$\alpha_h(T_h - T_{c+}) = \lambda_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial r}\right)_{r=r_0+\delta_c}, \tag{3}$$

$$\alpha_r(T_{s-} - T_r) = \lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial r}\right)_{r=r_0-\delta_s}; \tag{4}$$

- граничные условия на поверхности контакта слоёв:

$$\lambda_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial r}\right)_{r_0} = \lambda_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial r}\right)_{r_0}, \tag{5}$$

$$T_c|_{r_0} = T_s|_{r_0}; \tag{6}$$

- уравнение теплоотдачи в канале:

$$\frac{\alpha_r \delta_r}{\lambda_r} = k_1 \left(\frac{2v\delta_r\rho}{\mu}\right)^{k_2} \left(\frac{\mu c_p}{\lambda_r}\right)^{k_3} \left(\frac{T_{s-}}{T_r}\right)^{k_4};$$

- уравнение расхода охладителя в канале:

$$G = \rho v S; \tag{7}$$

- уравнение состояния в канале:

$$p = \rho R T_r; \tag{8}$$

- ограничение на тепловое состояние оболочки в условиях силового нагружения:

$$T_s \le f_{\text{дл}}(\sigma_i) = n\sigma_i^{-m},$$

где r – радиальная координата; r_0 – радиус кривизны оболочки на поверхности контакта; T_s – температура оболочки; T_c – температура теплоизоляционного покрытия; T_{c+} – температура покрытия на поверхности теплоподвода; T_{s-} – температура оболочки на поверхности охлаждения; T_{s0} – температура оболочки на поверхности контакта с покрытием; ρ – плотность охладителя; T_h – температура нагревателя; T_r – температура охладителя; δ_r – ширина канала охлаждения; S – площадь сечения канала охладителя; R – газовая постоянная; μ – динамическая вязкость охладителя; c_p – изобарная теплоёмкость; λ_r – коэффициент теплопроводности охладителя; λ_s – коэффициент теплопроводности оболочки, λ_c – коэффициент теплопроводности покрытия; k_1, k_2, k_3, k_4 – эмпирические коэффициенты уравнения теплообмена; σ_i – интенсивность напряжённого состояния оболочки; n, m – константы кривой длительной прочности.

При решении задачи принято допущение, что температурное поле преимущественно меняется в радиальном направлении; при течении охладителя в канале падение давления не рассматривается. Алгебраизацию системы дифференциальных уравнений будем проводить с помощью параболической аппроксимации температуры оболочки и защитного покрытия по толщине в радиальном направлении:

$$T_s(r) = a_s r^2 + b_s r + c_s, \tag{9}$$

$$T_c(r) = a_c r^2 + b_c r + c_c\ , \tag{10}$$

где $a_s, b_s, c_s, a_c, b_c, c_c$ – аппроксимирующие коэффициенты.

Граничные условия на поверхностях нагрева и охлаждения (3), (4) с учётом (9),(10):

$$\alpha_h[T_h - a_c(r_0+\delta_c)^2 - b_c(r_0+\delta_c) - c_c] - \lambda_c[2a_c(r_0+\delta_c) + b_c] = 0, \tag{11}$$

$$\alpha_r[T_{s-} - T_r] - \lambda_s[2a_s(r_0-\delta_s) + b_s] = 0. \tag{12}$$

Тепловые условия контакта слоёв (5), (6) с учётом (9), (10):

$$a_c r_0^2 + b_c r_0 + c_c - a_s r_0^2 - b_s r_0 - c_s = 0, \tag{13}$$

$$\lambda_c(2a_c r_0 + b_c) - \lambda_s(2a_s r_0 + b_s) = 0. \tag{14}$$

Температурные поля на граничных поверхностях оболочки:

$$T_{s0} - a_s r_0^2 - b_s r_0 - c_s = 0, \tag{15}$$

$$T_{s-} - a_s(r_0-\delta_s)^2 - b_s(r_0-\delta_s) - c_s = 0. \tag{16}$$

Уравнения теплопроводности Фурье (1), (2) для граничных поверхностей с учётом параболической интерполяции (9), (10):

$$4a_c(r_0+\delta_c) + b_c = 0, \tag{17}$$

$$4a_s(r_0-\delta_s) + b_s = 0. \tag{18}$$

Уравнения теплоотдачи и массового расхода охладителя в канале (7), (8):

$$\frac{\alpha_r\delta_r}{\lambda_r} - k_1\left(\frac{2v\delta_r\rho}{\mu}\right)^{k_2}\left(\frac{\mu c_p}{\lambda_r}\right)^{k_3}\left(\frac{T_{s-}}{T_r}\right)^{k_4} = 0, \tag{19}$$

$$G - \rho v S = 0. \tag{20}$$

Представленная задача является нелинейной задачей условной оптимизации. Для нахождения оптимальных по Парето значений локальных критериев предлагается использовать метод множителей Лагранжа. С этой целью введём функцию Лагранжа:

$$L(x_i, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{5}\beta_i\theta(x_i - x_*)\left(\frac{x_i - x_i^{(0)}}{x_i^{(0)}}\right)^{2[1+p\theta(x_i-x^*)]} + \sum_{j=1}^{10}\lambda_j\varphi_j, \tag{21}$$

где φ_j – левые части уравнений (9)-(20); λ_j – множители Лагранжа.

Используя необходимое условие экстремума, найдём частные производные $\partial L(x_i, \varphi_j)/\partial x_i$ уравнения (21) по параметрам оптимизации и составим уравнения:

$$2\beta_1[1 + p\theta(T_{s0} - T_{s0}^*)]\cdot\theta(T_{s0} - T_r)\frac{\left(T_{s0} - T_{s0}^{(0)}\right)^{1+2p\theta(T_{s0}-T_{s0}^*)}}{\left(T_{s0}^{(0)}\right)^{2+2p\theta(T_{s0}-T_{s0}^*)}} + \lambda_5 = 0,$$

$$2\beta_2[1+p\theta(G-G^*)]\frac{\left(G-G^{(0)}\right)^{1+2p\theta(G-G^*)}}{(G^{(0)})^{2+2p\theta(G-G^*)}}+\lambda_{10}=0,$$

$$2\beta_3[1+p\theta(\delta_c-\delta_c^*)]\frac{\left(\delta_c-\delta_c^{(0)}\right)^{1+2p\theta(\delta_c-\delta_c^*)}}{\left(\delta_c^{(0)}\right)^{2+2p\theta(\delta_c-\delta_c^*)}}-$$
$$-\lambda_1[2a_c(\alpha_h(r_0+\delta_c)+\lambda_c)+\alpha_h b_c]+4\lambda_7 a_c=0,$$

$$2\beta_4[1+p\theta(v-v^*)]\frac{\left(v-v^{(0)}\right)^{1+2p\theta(v-v^*)}}{(v^{(0)})^{2+2p\theta(v-v^*)}}+\lambda_{10}\rho S=0,$$

$$2\beta_5\frac{\alpha_r^{(0)}\left(\alpha_r-2\alpha_r^{(0)}\right)}{\left(\alpha_r-\alpha_r^{(0)}\right)^3}+\lambda_2(T_{s-}-T_r)-\lambda_{10}\frac{\delta_r}{\lambda_r}=0.$$

Найдём частные производные уравнений (11) – (20) по неизвестным параметрам системы $T_{s-}, a_s,\ b_s, c_s, a_c, b_c, c_c$:

$$\lambda_1(r_0+\delta_c)[2\lambda_c+\alpha_h(r_0+\delta_c)-4\varphi_7]-\lambda_3 r_0^2-2\lambda_4\lambda_c r_0=0,$$
$$\lambda_1[\lambda_c+\alpha_h(r_0+\delta_c)]-\lambda_3 r_0-2\lambda_4\lambda_c r_0-\lambda_7=0,$$
$$\lambda_1\alpha_h-\lambda_3=0,$$
$$(\lambda_3 r_0+2\lambda_4\lambda_s+\lambda_5 r_0)r_0+[\lambda_6(r_0-\delta_s)-4\lambda_8](r_0-\delta_s)=0,$$
$$(\lambda_3+\lambda_5)r_0+\lambda_4\lambda_s+\lambda_6(r_0-\delta_s)-\lambda_8=0,$$
$$\lambda_3+\lambda_5+\lambda_6=0,$$
$$\lambda_2\alpha_r-\lambda_6-\lambda_9 k_1\left(\frac{2v\delta_r\rho}{\mu}\right)^{k_2}\left(\frac{\mu c_p}{\lambda_r}\right)^{k_3}\frac{(T_{s-})^{k_4-1}}{(T_r)^{k_4}}=0.$$

Решение данной системы будем проводить в последовательных приближениях. В качестве исходных данных примем: $T_h = 1300$ K, $\alpha_h = 1700$ Вт/(м^{2}K), $T_r = 700$ K, $\lambda_c = 2$ Вт/(мK), $\lambda_s = 6$ Вт/(мK), $\rho_r = 0{,}3$ кг/м^3, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·K), $\mu = 4\cdot10^{-5}$ Н·с/м^2, $\lambda_r = 5\cdot10^{-2}$ Вт/(мK), $c_r = 1180$ Дж/(кг·K), $\delta_r = 10^{-4}$ м, $S = 3\cdot10^{-8}$ м, $k_1 = 0{,}022$, $k_2 = 0{,}8$, $k_3 = 0{,}43$, $k_4 = 0{,}42$, $r = 0{,}2$ м. Положим, что оболочка находится в напряжённом состоянии в результате силового нагружения, что актуально для рабочих турбинных лопаток оболочечного типа под действием газовых и центробежных сил. Ограничение по температуре для 100-часовой прочности для материала ЖС-ВИ $T_{s0}\le 1150$ K. В качестве начальных приближений примем следующие значения для локальных критериев: $T_{s0}^{(0)}=770\,\text{K}$, $G^{(0)}=4{,}6\cdot10^{-7}$ кг/с, $\delta_c^{(0)}=0{,}7\cdot10^{-3}$ м, $\upsilon^{(0)}=51$ м/с, $\alpha_r^{(0)}=380$ Вт/(м^{2}K).

В табл. 1 представлены результаты расчёта эффективных значений локальных критериев, доставляющих минимум целевой функции (21). Поскольку данная многокритериальная задача не имеет единственного решения, в зависимости от выбора коэффициентов значимости, определяющих степень предпочтительности каждого из параметров, представлены некоторые из множества неулучшаемых решений, где у одного из критериев, обладающего наибольшей значимостью, коэффициент $\beta_i=0{,}5$ принимал наибольшее значение, а для остальных параметров – принимался одинаковым и равным $\beta_j=0{,}125, j=\overline{1{,}5},\ j\ne i$.

При $i=1$ параметром с наибольшей значимостью являлась температура на поверхности контакта оболочки и покрытия, соответственно, для представленного множества эффективных решений при $i=1,\dots,4$ наилучшее решение для локального критерия T_{s0} получено при первом варианте решения, поскольку для вариантов $i = 2, \ldots, 4$ главным критерием оптимизации являлся один из конкурирующих параметров G, δ_c, v. При варианте $i = 5$ температура T_{s0} оказалась ниже, чем в варианте $i = 1$, это обусловлено тем, что главным оптимизируемым параметром при варианте $i = 5$ являлся коэффициент теплоотдачи, максимизация которого не является конкурирующей для минимизации температуры T_{s0}.

Таблица 1

Результаты расчёта оптимальных по Парето параметров тепловой защиты при различных весовых коэффициентах

Локальные критерии оптимизации	Варианты выбора весовых коэффициентов $\beta_i = 0{,}5, \quad \beta_j = 0{,}125, \quad j = \overline{1{,}5}, \quad j \neq i$				
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
Температура на поверхности оболочки T_{s0}, К	1087	1102	1093	1104	1073
Расход охладителя G, 10^{-7}кг/с	8,9	7,9	8,9	7,8	11,0
Толщина покрытия δ_c, 10^{-3}м	0,77	0,72	0,7	0,72	0,72
Скорость охладителя v, м/с	99	88	98	85	122
Теплоотдача на поверхности охлаждения α_r, Вт/(м^{2}К)	693	630	689	617	818

Таким образом, построенная численная модель позволяет найти оптимальные по Парето значения параметров тепловой защиты оболочки в зависимости от выбранной значимости каждого критерия. Практическая значимость исследования обусловлена возможностью поиска оптимального сочетания внешней тепловой защиты с помощью покрытия и внутреннего теплоотвода с помощью охлаждающего агента. Представленная модель позволяет ранжировать частные критерии (температуру оболочки, расход охладителя, толщину покрытия, скорость и теплоотдачу охладителя) за счёт введения весовых коэффициентов и найти при заданных ограничениях множество эффективных значений. Применение модели позволит исключить нецелесообразное охлаждение оболочек, учесть в процессе тепловой защиты напряжённое и тепловое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белова, С. Е. Применение методики оптимизации эффективности охлаждения при 30-моделировании теплового состояния перфорированной дефлекторной лопатки соплового аппарата турбины / С. Е. Белова, М. Н. Орешкина, А. Н. Поткин // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2007. – № 11. – С. 48-49.
2. Петров, А. С. Термомеханический анализ конструкции при сварке в системе Marc / А. С. Петров, М. С. Нюняйкина, К. С. Бормотин // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2020. – С. 31-32.
3. Викулин, А. В. Разработка системы охлаждения и верификация результатов моделирования температурного состояния рабочей лопатки газовой турбины / А. В. Викулин, В. А. Земляная, Е. Н. Жильцова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2018. – Т. 20. – № 6 (86). – С. 114-119.
4. Горелов, С. Н. Алгоритм поиска оптимального варианта конструкции методом локальных вариаций множителей Лагранжа / С. Н. Горелов, М. И. Климов // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2013. – № 9 (158). – С. 190-195.

5. Андрианов, И. К. Математическая модель оптимального массового расхода охладителя в каналах теплоотвода оболочковых элементов турбомашин / И. К. Андрианов, М. С. Гринкруг // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2017. – Т. 21. – № 2 (76). – С. 42-46.
6. Гринкруг, М. С. Численный подход к расчёту параметров охлаждающего потока в каналах оболочковых элементов турбомашин для заданных условий на поверхности теплоотвода / М. С. Гринкруг, И. К. Андрианов // Интернет-журнал Науковедение. – 2016. – Т. 8. – № 1 (32). – С. 24.
7. Гудим, А. С. Нечёткие алгоритмы компенсации нелинейностей САУ / А. С. Гудим, И. В. Зайченко, В. А. Соловьев // Информатика и системы управления. – 2005. – № 2 (10). – С. 89-101.
8. Математическое моделирование термонапряжённого состояния многослойных оболочковых форм с фазовым переходом при литье стальных отливок / В. И. Одиноков, Э. А. Дмитриев, А. И. Евстигнеев, А. В. Свиридов, Г. М. Севастьянов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2017. – № II-1 (30). – С. 100-104.
9. Евстигнеев, А. И. Расчёт оболочковых форм, полученных электрофорезом / А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев // Литейное производство. – 2009. – № 1. – С. 29-33.
10. Евстигнеев, А. И. Напряжённо-деформированное состояние электрофоретических форм при их нагреве и прокаливании / А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, А. В. Свиридов // Современные технологии в машиностроении и литейном производстве. Материалы I Международной научно-практической конференции. – Чебоксары: Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, 2015. – С. 161-165.
11. Емельянов, Г. М. Обратная оптимизация в многокритериальных задачах / Г. М. Емельянов, С. А. Попов // Математические методы распознавания образов. – 2005. – Т. 12. – № 1. – С. 101-104.
12. Ким, К. К. Алгоритм CFD-моделирования процесса тепломассопереноса в совмещённом электротехническом устройстве / К. К. Ким, А. А. Просолович, С. Н. Иванов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № III-1 (43). – С. 65-72.
13. Комаров, О. А. Сравнение газодинамических моделей ячеистого охлаждения и прямого моделирования охлаждающих отверстий лопаток турбин / О. А. Комаров, А. А. Бобрик // Наука и инновации в современном мире: сборник научных статей. Ч. 1. – М.: Изд-во «Перо», 2018. – С. 162-163.
14. Совершенствование конструкций газомагнитных опор высокоскоростных роторных машин / С. М. Копытов, А. В. Космынин, А. В. Ульянов, В. С. Щетинин, А. С. Хвостиков // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10-1. – С. 25-29.
15. Многокритериальная оптимизация состава теплоизоляционного автоклавного газобетона, модифицированного дисперсией углеродных нанотрубок / С. В. Леонтьев, В. А. Шаманов, А. Д. Курзанов, Г. И. Яковлев // Строительные материалы. – 2017. – № 1-2. – С. 31-40.
16. Медведева, Н. В. Оптимизация распределения активной нагрузки энергосистемы методом неопределённых множителей Лагранжа / Н. В. Медведева, Я. Ю. Ялунин // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях: сборник научных трудов / под науч. ред. Г. А. Тимофеевой, О. В. Куликовой. – Екатеринбург: УрГУПС, 2012. – С. 269-279.
17. Папушкин, М. А. Моделирование фильтрационного охлаждения тел на примере лопаток турбины ГТД / М. А. Папушкин, С. П. Серебряков // NovaInfo.Ru. – 2016. – Т. 2. – № 46. – С. 34-36.
18. Пассар, А. В. Проектирование проточной части радиально-осевой турбины с использованием метода множителей Лагранжа / А. В. Пассар, Д. В. Тимошенко // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2015. – № 1 (309). – С. 54-61.
19. Попов, Г. М. Многокритериальная оптимизация рабочего процесса осевого компрессора газотурбинного двигателя с учётом многорежимности его работы / Г. М. Попов, Е. С. Горячкин, Ю. Д. Новикова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2017. – Т. 19. – № 1. – С. 98-106.
20. Романова, И. К. Основные подходы к выбору состава материала путём многокритериальной оптимизации / И. К. Романова // Все материалы. Энциклопедический справочник. – 2017. – № 7. – С. 14-18.
21. Сераухова, О. Ю. Метод множителей Лагранжа для нахождения точек условного экстремума функций нескольких переменных / О. Ю. Сераухова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. – 2016. – № 4. – С. 174-175.
22. Ярославцев, Н. Л. Разработка системы охлаждения базового варианта лопатки с компланарными каналами / Н. Л. Ярославцев, С. С. Ремчуков // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2018. – Т. 1. – С. 367-370.