Феоктистов С. И., Андрианов И. К.
S. I. Feoktistov, I. K. Andrianov

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

DETERMINATION OF THE BEARING CAPACITY OF THICK-WALLED AXISYMMETRIC SHELLS LOADED WITH INTERNAL PRESSURE

Феоктистов Сергей Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина 27. E-mail: serg_feo@mail.ru.
Sergey I. Feoktistov – Doctor of Engineering, Professor, Aircraft Industry Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin str., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: serg_feo@mail.ru.

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Общая физика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – Phd in Engineering, Assistant Professor, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin str., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Аннотация. В работе рассмотрен вопрос определения несущей способности толстостенных оболочек в осесимметричной и центрально-симметричной постановке задачи. Задача решалась методом переменных параметров упругости при степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала. Приведено сравнение полученных результатов с имеющимися аналитическими решениями для тонкостенных оболочек. Получены формулы, позволяющие с большой точностью определить несущую способность толстостенной оболочки при различных относительных толщинах для физически нелинейного материала.

Summary. The paper considers the issue of determining the bearing capacity of thick-walled shells in an axisymmetric and centrally symmetric formulation of the problem. The problem was solved by the method of variable elasticity parameters with a power approximation of the deformation diagram of the material. The results obtained are compared with the available analytical solutions for thin-walled shells. Formulas are obtained that make it possible to determine with great accuracy the bearing capacity of a thick-walled shell at different relative thicknesses for a physically nonlinear material.

Ключевые слова: толстостенная оболочка, несущая способность, переменные параметры упругости, физическая нелинейность материала.

Key words: thick-walled shell, load-bearing capacity, variable elasticity parameters, physical nonlinearity of the material.

УДК 593.3

Толстостенные осесимметричные оболочки в настоящее время находят всё более широкое применение в различных инженерных конструкциях: это сосуды высокого давления, кольцевые фундаменты, напорные трубы, тоннели и др. Напряжения в таких конструкциях распределяются по толщине неравномерно, что необходимо учитывать при расчёте на прочность. В большинстве известных решений рассматривается упругопластическая модель материала без упрочнения или с линейным упрочнением, но при определении предельных нагрузок необходимо учитывать и физическую нелинейность материала – закон упрочнения при пластическом деформировании.

Основными уравнениями для расчётов за пределами упругости по деформационной теории являются: дифференциальные уравнения равновесия, условия совместности деформаций, зависимость между деформациями и напряжениями и условия на поверхности.

Рассмотрим цилиндрическую толстостенную оболочку бесконечной длины (стеснённую оболочку), которая находится под действием внутреннего давления. В этом случае можно считать, что длина оболочки не меняется, т.е. деформация вдоль оболочки отсутствует, ***деформированное состояние плоское*** и $e_z = 0$.

В случае постоянного давления касательные напряжения вдоль цилиндрической оболочки отсутствуют, производные по z равны нулю, а условия равновесия определяются одним уравнением [1]:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\rho}{\rho}. \tag{1}$$

Уравнения совместности логарифмических деформаций для осесимметричного деформированного состояния можно записать в виде дифференциального уравнения [2]:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_{\rho)}}{\rho}, \tag{2}$$

где $e_\rho = \ln(d\rho/dr)$ и $e_\theta = \ln(\rho/r)$ – соответственно радиальные и тангенциальные (окружные) логарифмические деформации.

Уравнения связи между напряжениями и деформациями, в соответствии с методом переменных параметров упругости (МППУ) [3; 4], запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{E^*}\left[\sigma_\rho - \mu^*(\sigma_\theta + \sigma_z)\right] \\ e_\theta &= \frac{1}{E^*}\left[\sigma_\theta - \mu^*\left(\sigma_z + \sigma_\rho\right)\right] \\ e_z &= \frac{1}{E^*}\left[\sigma_z - \mu^*\left(\sigma_\rho + \sigma_\theta\right)\right] \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где E^* и μ^* – переменные параметры упругости.

Для несжимаемого тела, у которого $\mu = 0{,}5$, имеем

$$E^* = E_{\text{сек}} = \frac{\sigma_i}{e_i}\ , \qquad \mu^* = 0{,}5, \tag{4}$$

где σ_i – интенсивность напряжений; e_i – интенсивность логарифмических деформаций.

Интенсивности напряжений и логарифмических деформаций в главных напряжениях и деформациях определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_\rho - \sigma_\theta\right)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_\rho\right)^2} \\ e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(e_\rho - e_\theta\right)^2 + (e_\theta - e_z)^2 + \left(e_z - e_\rho\right)^2} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Диаграмма деформирования материала как связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью логарифмических деформаций задаётся линейно-степенной функцией:

$$\sigma_i = \begin{cases} E\ e_i & \text{при } e_i \le e_{i\text{т}} \\ A\ e_i^n & \text{при } e_i > e_{i\text{т}} \end{cases}. \tag{6}$$

Условия на наружной поверхности оболочки (граничные условия): при $\rho = R$, $e_\theta = e_{\theta R} = \ln(R/R_0)$, $\sigma_{\rho R} = 0$.

Поставленную задачу будем решать методом переменных параметров упругости. Для успешной реализации этого метода необходимо получить интегральные уравнения.

В уравнении совместности логарифмических деформаций (2) проведём замену:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1}{\exp(e_\theta)} \frac{d(\exp(e_\theta))}{d\rho},$$

и запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d(\exp(e_\theta))}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\exp(e_\theta) - \frac{1}{\rho}\exp(2e_\theta - e_\rho). \quad (7)$$

Рассматривая уравнение (7) как нелинейное дифференциальное уравнение первой степени вида

$$\frac{dY}{d\rho} = A(\rho) \cdot Y + B(\rho)$$

и решая его методом Бернули, получим общее решение:

$$\exp(e_\theta) = -\rho \int \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho)\, d\rho + C\ \rho.$$

Принимая во внимание граничные условия при $\rho = R$, $e_\theta = e_{\theta R} = \ln(R/R_0)$, а также используя уравнения связи между напряжениями и деформациями (3) для несжимаемого материала, получим интегральное уравнение совместности логарифмических деформаций в напряжениях:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_z + \sigma_\rho\right) + E_{\text{сек}} \ln\left(-\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp\left[\frac{1}{E_{\text{сек}}}\left(\frac{5}{2}\sigma_\theta - 2\sigma_\rho - \frac{1}{2}\sigma_z\right)\right] d\rho + \frac{\rho}{R_0}\right),$$

или, учитывая, что для бесконечной трубы $e_z = 0$ и, соответственно, $\sigma_z = \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho + \sigma_\theta\right)$,

$$\sigma_\theta = \sigma_\rho + \frac{4}{3} E_{\text{сек}} \ln\left(-\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp\left[\frac{9}{4E_{\text{сек}}}\left(\sigma_\theta - \sigma_\rho\right)\right] d\rho + \frac{\rho}{R_0}\right). \quad (8)$$

Для определения σ_ρ используем уравнение равновесия (1). Интегрируя данное уравнение, принимая во внимание граничные условия при $\rho = R$, $\sigma_{\rho R} = 0$, получаем интегральное уравнение равновесия:

$$\sigma_\rho = \int_R^\rho \frac{\left(\sigma_\theta - \sigma_\rho\right)}{\rho} d\rho. \quad (9)$$

Решение по определению напряжённо-деформированного состояния трубы в соответствии с методом переменных параметров упругости проводится методом последовательных приближений по рекуррентной схеме с использованием уравнений (8) и (9) для заданных граничных условий, т.е. при известном положении наружного края трубы R и радиальном напряжении на наружном крае $\sigma_{\rho R} = 0$

$$\sigma_\theta{}^{(k+1)} = \sigma_\rho{}^{(k)} + \frac{4}{3} E_{\text{сек}}{}^{(k)} \ln\left(-\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp\left[\frac{9}{4E_{\text{сек}}{}^{(k)}}\left(\sigma_\theta{}^{(k)} - \sigma_\rho{}^{(k)}\right)\right] d\rho + \frac{\rho}{R_0}\right);$$

$$\sigma_\rho{}^{(k+1)} = \int_R^\rho \frac{\left(\sigma_\theta{}^{(k+1)} - \sigma_\rho{}^{(k)}\right)}{\rho} d\rho;$$

$$\sigma_z{}^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_\rho{}^{(k+1)} + \sigma_\theta{}^{(k+1)}\right),$$

где величины с индексом (k) и (k+1) обозначают соответственно их значения в k-м и (k+1)-м приближениях. Численное интегрирование проводят от R до $r^{(J)}$, где $r^{(J)}$ – внутренний радиус трубы в процессе деформирования. В нулевом приближении при $j = 0$ считаем, что $r^{(J)} = r_0$, где r_0 – внутренний радиус трубы в исходном состоянии без нагрузки.

Как показали вычисления, результаты расчётов не зависят от выбора значений исходного приближения для $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ и σ_z, поэтому в исходном приближении принимаем

$$\sigma_\rho{}^{(0)} = 0, \sigma_\theta{}^{(0)} = 0, \sigma_z{}^{(0)} = 0, E_{\text{сек}}{}^{(0)} = E,$$

где E – модуль упругости материала, из которого изготовлена труба.

После определения напряжённого состояния находят деформированное состояние трубы, используя уравнения связи между напряжениями и деформациями (3).

Определив деформированное состояние, находят интенсивность напряжений и интенсивность деформаций (5) и уточняют значение $E_{\text{сек}}$, используя уравнение (6):

$$E_{\text{сек}}{}^{(k+1)} = \frac{A\left(e_i{}^{(k+1)}\right)^n}{e_i{}^{(k+1)}}.$$

Для контроля сходимости процесса проводят сравнение значений интенсивностей напряжений:

$$\frac{\sigma_i{}^{(k+1)} - \sigma_i{}^{(k)}}{\sigma_i{}^{(k+1)}} 100\% \leq \Delta\sigma_i\%. \qquad (10)$$

Расчёт продолжают до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность в процентах (10).

После достижения заданной точности расчёта напряжённо-деформированного состояния уточняют положение внутреннего края трубы:

$$r^{(j+1)} = r_0 \exp\left(e_{\theta r}{}^{(j)}\right),$$

где $e_{\theta r}{}^{(j)}$ – значение тангенциальной логарифмической деформации на верхней границе численного интегрирования, т.е. при $\rho = r^{(J)}$.

После уточнения внутреннего радиуса трубы в процессе деформирования и изменения верхнего предела численного интегрирования, расчёт напряжённо-деформированного состояния повторяют до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность определения внутреннего радиуса:

$$\frac{r^{(j+1)} - r^{(J)}}{r^{(j+1)}} 100\% \leq \Delta r\%.$$

После окончательного определения напряжённо-деформированного состояния можно найти внутреннее давление в трубе, при котором произошло заданное увеличение наружного радиуса трубы:

$$p = -\sigma_{\rho r},$$

где $\sigma_{\rho r}$ – значение радиального напряжения на внутренней поверхности трубы в заключение всех расчётов.

Рассмотрим толстостенную сферическую оболочку. Для объёмного осесимметричного напряжённого состояния в сферической системе координат в случае центральной симметрии (равномерное давление внутри сферы) касательные напряжения отсутствуют, производные по φ равны нулю, а условия равновесия [1] будут иметь вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left[2\sigma_\rho-\left(\sigma_\varphi+\sigma_\theta\right)\right]=0;$$

$$\left(\sigma_\varphi-\sigma_\theta\right)=0,$$

или

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}=\frac{2\left(\sigma_\theta-\sigma_\rho\right)}{\rho}.$$

Можно показать, что условия совместности логарифмических деформаций в случае центральной симметрии можно представить в виде

$$\frac{de_\theta}{d\rho}=\frac{1-\exp(e_\theta-e_{\rho)}}{\rho}; \tag{11}$$

$$\left(e_\varphi-e_\theta\right)=0.$$

Решая дифференциальное уравнение системы (11) и учитывая условия равенства σ_φ и σ_θ, можем получить интегральное уравнение условия совместности логарифмических деформаций в напряжениях для несжимаемого материала:

$$\sigma_\theta=\sigma_\rho+2E_{\text{сек}}\ln\left(-\rho\int_R^\rho\frac{1}{\rho^2}\exp\left[\frac{2}{E_{\text{сек}}}\left(\sigma_\theta-\sigma_\rho\right)\right]d\rho+\frac{\rho}{R_0}\right).$$

Интегральное уравнение равновесия записывается в виде

$$\sigma_\rho=\int_R^\rho\frac{2\left(\sigma_\theta-\sigma_\rho\right)}{\rho}d\rho.$$

Расчёт напряжённо-деформированного состояния толстостенной сферической оболочки и определение давления осуществляют в той же последовательности, что и в первом случае.

Чтобы найти несущую способность толстостенной оболочки, необходимо определить, когда давление достигает точки экстремума. Для этого необходимо выполнение условия

$$p=P_{\max}\ \text{при}\ dp=0.$$

Таким образом, значение $P_{\max}$ определяет несущую способность толстостенной трубы.

Изменяя с определённым шагом наружный радиус R и определяя на каждом шаге давление p, можем построить график зависимости p от R. Анализируя полученный график, можно заметить, что в некоторый момент при увеличении наружного радиуса давление деформирования начинает падать, т.е. давление достигает максимума и приращение давления при увеличении радиуса становится меньше нуля:

$$dp<0.$$

Это говорит о том, что наступил момент неустойчивого деформирования оболочки с последующим разрушением. Величина максимального давления в этом случае определяет несущую способность оболочки.

Как показали расчёты, несущая способность толстостенных оболочек, как цилиндрических, так и сферических, для конкретного материала зависит только от величины относительной толщины, определяемой как отношение исходной толщины к среднему радиусу оболочки в исходном состоянии:

$$\overline{h_0}=\frac{h_0}{r_{\text{ср}0}}=\frac{h_0}{(R_0+r_0)/2},$$

где h_0 – исходная толщина оболочки; $r_{\text{ср}0}$ – средний радиус оболочки в исходном состоянии; R_0 – наружный радиус оболочки в исходном состоянии; r_0 – внутренний радиус оболочки в исходном состоянии.

Поэтому все расчёты проводились для определённой относительной толщины оболочки.

Для сравнения результатов, полученных при определении несущей способности толстостенных осесимметричных оболочек, рассмотрим аналитические решения для аналогичных тонкостенных оболочек.

Решение для тонкостенной цилиндрической оболочки бесконечной длины (стеснённой оболочки), нагруженной внутренним давлением, приведено Н. Н. Малининым [5]. В этом случае длина оболочки не меняется и напряжения определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p r_{\text{ср}}}{h} \\ \sigma_z &= \frac{p r_{\text{ср}}}{2h} \\ \sigma_\rho &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Логарифмические тангенциальные (окружные), осевые и радиальные деформации, соответственно [5],

$$e_\theta = \ln\frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}0}};\ e_z = 0;\ e_\rho = \ln\frac{h}{h_0}.$$

Зависимость между давлением p и средним радиусом оболочки $r_{\text{ср}}$ определяется выражением

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{h_0 r_{\text{ср}0}}{{r_{\text{ср}}}^2} A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}0}}\right)^n, \tag{12}$$

а связь между толщиной оболочки и средним радиусом

$$h = h_0\frac{r_{\text{ср}0}}{r_{\text{ср}}}. \tag{13}$$

Значение радиуса срединной поверхности тонкостенной цилиндрической оболочки бесконечной длины, при котором возникает потеря устойчивости и разрушение, равно

$$r_{\text{ср max}} = r_{\text{ср}0}\exp\left(\frac{1}{2}n\right). \tag{14}$$

В этом случае максимально допустимое давление (несущую способность) такой тонкостенной цилиндрической оболочки бесконечной длины для конкретного материала можно определить формулой

$$P_{\max} = \frac{2A\overline{h_0}}{\sqrt{3}\left(\exp\left(\frac{1}{2}n\right)\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}n\right)^n, \tag{15}$$

где A и n – соответственно коэффициент и показатель степенной функции, аппроксимирующей диаграмму деформирования материала; $\overline{h_0}$ – относительная толщина оболочки в исходном состоянии.

Для тонкостенной сферической оболочки, нагруженной внутренним давлением, тангенциальные (окружные), меридиональные и радиальные напряжения определятся как [5]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{p r_{\text{ср}}}{h} \\ \sigma_\varphi &= \frac{p r_{\text{ср}}}{h} \\ \sigma_\rho &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Логарифмические тангенциальные (окружные), меридиональные и радиальные деформации соответственно [5]

$$e_\theta = \ln\frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}0}};\ e_\varphi = \ln\frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}0}};\ e_\rho = \ln\frac{h}{h_0}.$$

В этом случае зависимость между давлением p и средним радиусом сферической оболочки $r_{\text{ср}}$ определяется выражением

$$p = \frac{2\,h_0 {r_{\text{ср}0}}^2}{{r_{\text{ср}}}^3} A \left(2\ln\frac{r_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}0}}\right)^n, \tag{16}$$

а связь между толщиной оболочки и средним радиусом

$$h = h_0\left(\frac{r_{\text{ср}0}}{r_{\text{ср}}}\right)^2. \tag{17}$$

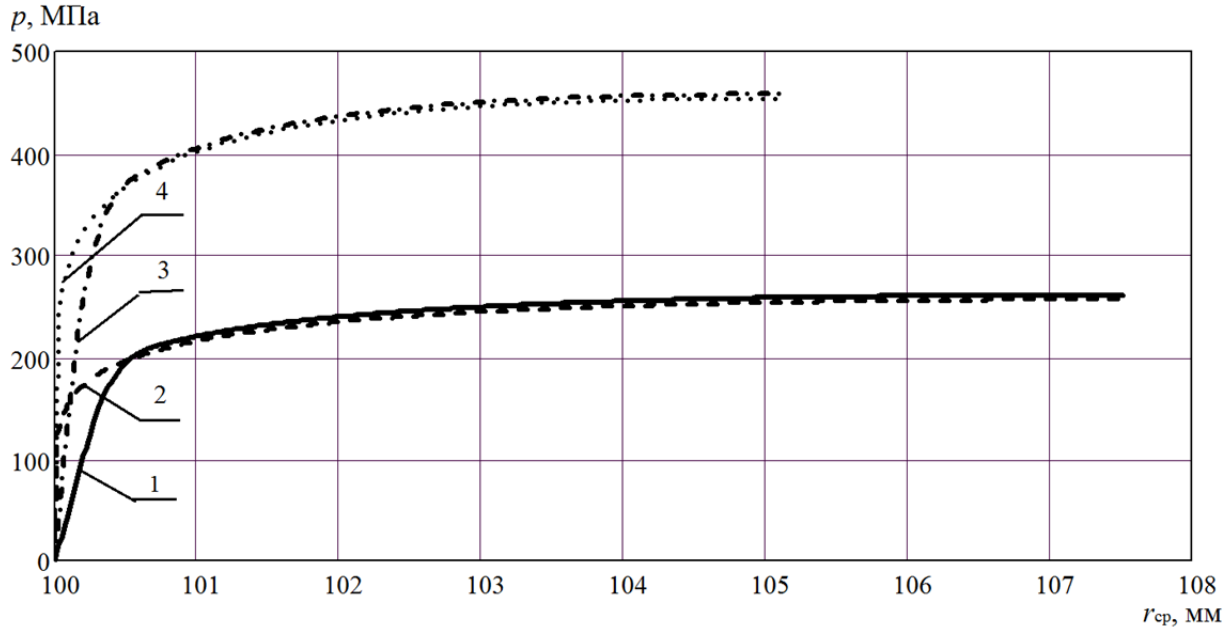
Значение радиуса срединной поверхности тонкостенной сферической оболочки, при котором возникает потеря устойчивости и разрушение, равно

$$r_{\text{ср max}} = r_{\text{ср}0}\exp\left(\frac{1}{3}n\right). \tag{18}$$

Максимально допустимое давление (несущую способность) такой тонкостенной сферической оболочки для конкретного материала можно определить формулой

$$P_{\max} = \frac{2A\overline{h_0}}{\left(\exp\left(\frac{1}{3}n\right)\right)^3}\left(\frac{2}{3}n\right)^n. \tag{19}$$

На рис. 1 представлена зависимость между давлением p и средним радиусом $r_{\text{ср}}$ для толстостенных оболочек, рассчитанная методом переменных параметров упругости (МППУ), и тонкостенных оболочек, рассчитанная по формулам (12) и (16) при $r_{\text{ср}0}$= 100 мм и h_0= 50 мм, для алюминиевого сплава 1163 (Д16чТ1) [6].



1 – толстостенная цилиндрическая оболочка (МППУ); 2 – тонкостенная цилиндрическая оболочка (формула (12)); 3 – толстостенная сферическая оболочка (МППУ); 4 – тонкостенная сферическая оболочка (формула (16))

Рис. 1. Зависимость между давлением p и средним радиусом оболочки $r_{\text{ср}}$

Как показал сравнительный анализ численных расчётов методом переменных параметров упругости и по формулам, полученным аналитически, при относительной толщине оболочек $\overline{h_0} = 0{,}5$ разница между результатами при определении несущей способности $P_{\max}$ не превышает 1,5 %, а при определении толщины h – 0,5 %. Большое различие полученных значений давлений вначале нагружения объясняется тем, что при расчёте МППУ применялась линейно-степенная аппроксимация диаграммы деформирования, а при аналитических расчётах – степенная.

Таким образом, можно сделать вывод, что при расчёте больших деформаций и предельного состояния толстостенных оболочек, нагруженных внутренним давлением, можно с большой точностью использовать для цилиндрических оболочек формулы (12), (13), (14), (15), а для сферических – (16), (17), (18), (19). Важно отметить, что исследование напряжённо-деформированного состояния оболочек имеет большое значение в различных областях машиностроения, литейного производства, штамповке, что подтверждается исследованиями [7-11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сторожев, М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
2. Феоктистов, С. И. Автоматизация проектирования технологических процессов и оснастки заготовительно-штамповочного производства авиационной промышленности: монография / С. И. Феоктистов. – Владивосток: Дальнаука, 2001. – 183 с.
3. Биргер, И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения / И. А. Биргер. – М.: Оборонгиз, 1961. – 358 с.
4. Биргер, И. А. Сопротивление материалов: учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 560 с.
5. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
6. Промышленные алюминиевые сплавы: справ. / С. Г. Алиев, М. Б. Альтман, С. М. Амбарцумян и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1984. – 528 с.
7. Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния монослойных электрофоретических оболочковых форм / А. И. Евстигнеев, В. И. Одиноков, А. В. Свиридов, Э. А. Дмитриев, В. В. Петров // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № III-1 (35). – С. 66-72.
8. Петров, М. Р. Определение диаграммы растяжения трубчатого стержня из гиперэластичного материала / М. Р. Петров, А. Н. Петрова, С. Ф. Хакимов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1 (34). – С. 29-34.
9. Исследование деформационно-технологических характеристик стали 12Х18Н10Т / О. В. Башков, В. А. Ким, С. З. Лончаков, Р. А. Физулаков, И. В. Белова // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2019. – № I-1 (37). – С. 77-83.
10. Растяжение сжимаемой полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации / И. В. Канашин, А. Л. Григорьева, А. И. Хромов, Я. Ю. Григорьев, В. А. Машевский // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № III-1 (51). – С. 39-41.
11. Сысоев, О. Е. Исследование собственных колебаний и напряжённо-деформированного состояния замкнутого кольца при местном нагреве / О. Е. Сысоев, А. Ю. Добрышкин, С. Н. Нейн // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № II-1 (33). – С. 111-115.