Феоктистов С. И., Андрианов И. К.
S. I. Feoktistov, I. K. Andrianov

УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В КООРДИНАТАХ ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

EQUATIONS OF JOINT LOGARITHMIC DEFORMATIONS IN EULER COORDINATES FOR SOLVING AXISYMMETRIC PRESSURE METAL PROCESSES

Феоктистов Сергей Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина 27. E-mail: serg_feo@mail.ru.
Sergey I. Feoktistov – Doctor of Engineering, Professor, Aircraft Industry Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin str., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: serg_feo@mail.ru.

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Общая физика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – Phd in Engineering, Assistant Professor, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin str., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Аннотация. В работе рассмотрен вопрос вывода уравнений совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для расчёта объёмного и плоского осесимметричного деформирования и для расчёта осесимметричных тонкостенных оболочек.

Summary. The paper considers the issue of derivation of compatibility equations of logarithmic deformations in Euler coordinates for the calculation of volumetric and plane axisymmetric deformation and for the calculation of axisymmetric thin-walled shells.

Ключевые слова: обработка металлов давлением, координаты Эйлера и Лагранжа, объёмное деформирование, тонкостенные оболочки.

Key words: pressure treatment of metals, Euler and Lagrange coordinates, volumetric deformation, thin-walled shells.

УДК 593.3

Основными уравнениями, определяющими напряжённо-деформированное состояние при решении упруго-пластических задач обработки металлов давлением, являются уравнения равновесия и условия совместности деформаций.

В случае решения плоской осесимметричной задачи уравнение равновесия имеет вид [1]

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\rho}{\rho}, \tag{1}$$

где σ_ρ и σ_θ – соответственно радиальные и тангенциальные (окружные) напряжения; ρ – координата элемента заготовки, где определяется напряжённое состояние.

Для осесимметричного процесса формообразования радиальное перемещение элемента заготовки можно записать так:

$$u_\rho = \rho - r,$$

где r – координата элемента заготовки до деформации; ρ – координата элемента заготовки, куда она переместилась в процессе формообразования.

В этом случае относительные деформации определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\rho = \frac{du_\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dr} - 1 \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{r} = \frac{\rho}{r} - 1 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

а условие совместности относительных деформаций, соответственно,

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta}{r}, \tag{3}$$

где ε_ρ и ε_θ – соответственно радиальные и тангенциальные (окружные) относительные деформации.

Если мы сравним уравнение (1) с уравнением (3), то заметим несоответствие между системами координат, в которых они записаны. На это обращает внимание Г. А. Смирнов-Аляев [2].

Объясняется это тем, что уравнение равновесия выводят по отношению к деформируемому телу, т.е. в координатах Эйлера (рассматривается точка пространства), а геометрические соотношения выводят по отношению к недеформированному телу, т.е. в координатах Лагранжа (рассматривается перемещение точки среды).

Для теории упругости и при малых упругопластических деформациях это несоответствие не учитывают, но при исследовании процессов обработки металлов давлением перемещения точек могут быть большими и совмещение координат Эйлера и Лагранжа может привести к значительным погрешностям.

Для решения данного противоречия, как правило, используют два подхода. Согласно первому варианту, в уравнениях равновесия переменные преобразуют с помощью замены, переходя от координат напряжённо-деформированного состояния к координатам начального состояния. Во втором подходе, оставляя классическую постановку статических уравнений равновесия, преобразуют геометрические соотношения, переходя к координатам деформированного тела. Оба подхода существенно усложняют математическую постановку задачи. Среди основных проблем можно отметить сложность задания граничных условий в координатах деформированного тела, если заданы размеры тела до деформации, а также проблему задания граничных статических условий в координатах тела до деформации в виду зависимости внешних сил от конфигурации тела в деформированном состоянии.

Следует отметить, что второй подход, связанный с преобразованием систем уравнений к координатам Эйлера, более удобен для решения обратных задач теории обработки давлением, когда при известных перемещениях точек тела рассчитываются потребные усилия [3], в то время как первый подход – для решения прямых задач, когда при известных усилиях определяются перемещения, т.е. рассчитывается форма получаемой детали.

Проведённые в работах [4; 5] исследования показали, что использование координат Эйлера при больших деформациях и перемещениях весьма эффективно. При этом изделия оболочечного типа широко используются при решении технических задач литья, посадки, колебаний, что отражено в трудах [6–10].

Выведем уравнение совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для объёмного и плоского осесимметричного деформированного состояния.

Используя уравнения (1), получим

$$dr = \frac{d\rho}{\varepsilon_\rho + 1};$$

$$r = \frac{\rho}{\varepsilon_\theta + 1}.$$

Подставляя полученные выражения в (3), можно получить уравнение совместности относительных деформаций в координатах Эйлера:

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} = \frac{(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)(\varepsilon_\rho + 1)}{\rho(\varepsilon_\theta + 1)}.$$

Согласно определению логарифмических деформаций [1] и используя выражения (2), имеем

$$\left.\begin{aligned} e_\rho &= \ln(\varepsilon_\rho + 1) = \ln\left(\frac{d\rho}{dr}\right) \\ e_\theta &= \ln(\varepsilon_\theta + 1) = \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Заменяя в выражении (3) относительные деформации логарифмическими (4), окончательно получим уравнение совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для объёмного и плоского осесимметричного деформированного состояния:

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_\rho)}{\rho}, \tag{5}$$

где e_ρ и e_θ – соответственно радиальные и тангенциальные (окружные) логарифмические деформации, определяемые выражениями (4).

Уравнение (5) можно использовать и для расчётов в сферической системе координат при условии центральной симметрии.

Рассмотрим деформацию элементов тонкостенной осесимметричной оболочки в процессе формообразования.

Согласно рис. 1, в цилиндрической системе координат имеем следующие соотношения:

$$dl_{m0} = \frac{dr}{\cos\varphi_0}, \qquad dl_m = \frac{d\rho}{\cos\varphi};$$

$$dl_{\theta 0} = r d\theta, \qquad dl_\theta = \rho d\theta,$$

где dl_{m0} и dl_m – соответственно длина рассматриваемого элемента в меридиональном направлении до и в процессе формообразования; $dl_{\theta 0}$ и dl_θ – соответственно длина рассматриваемого элемента в тангенциальном (окружном) направлении до и в процессе формообразования; φ_0 и φ – угол между касательной к рассматриваемому элементу оболочки в меридиональном сечении и горизонталью до и в процессе формообразования соответственно; θ – угол, определяющий положение рассматриваемого элемента по окружности в цилиндрической системе координат.

Таким образом, относительные деформации в цилиндрической системе координат определяются следующими соотношениями:

- меридиональные относительные деформации

$$\varepsilon_m = \frac{dl_m - dl_{m0}}{dl_{m0}} = \frac{d\rho}{dr}\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi} - 1;$$

- тангенциальные (окружные) относительные деформации

$$\varepsilon_\theta = \frac{dl_\theta - dl_{\theta 0}}{dl_{\theta 0}} = \frac{\rho}{r} - 1.$$

Принимая во внимание уравнения связи между логарифмическими и относительными деформациями [1], получим выражения для логарифмических деформаций:

$$\left.\begin{aligned} e_m = \ln(\varepsilon_m + 1) = \ln\left(\frac{d\rho}{dr}\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right) \\ e_\theta = \ln(\varepsilon_\theta + 1) = \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \end{aligned}\right\}.$$

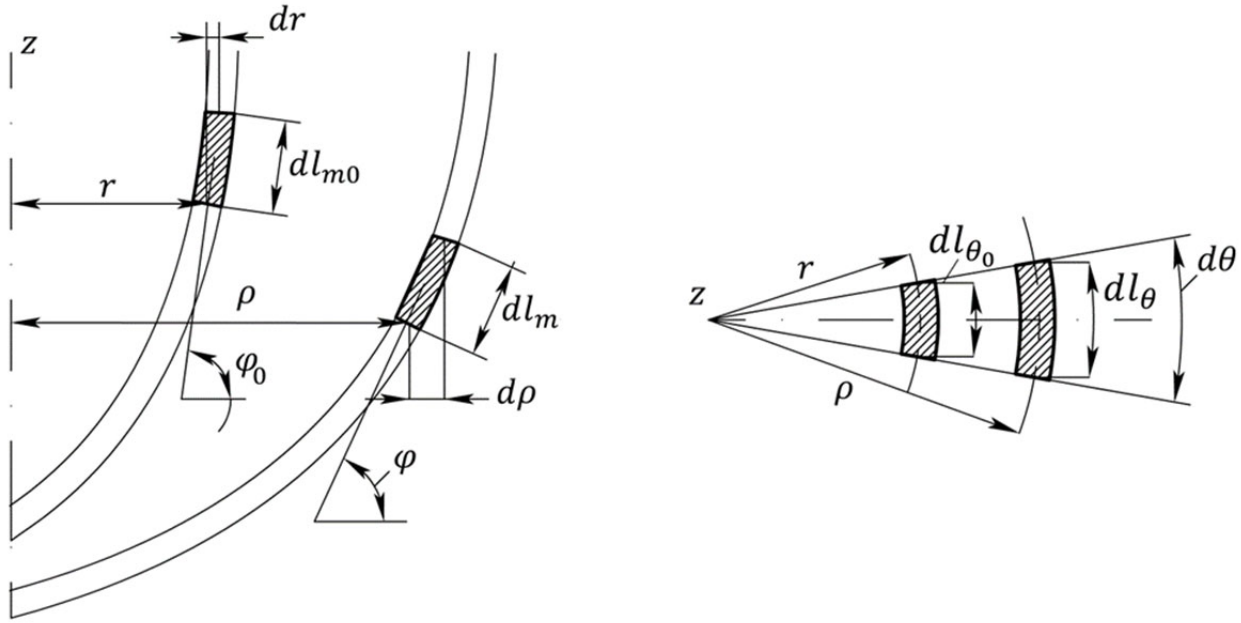

Рис. 1. Деформация элемента тонкостенной оболочки в меридиональном и тангенциальном (окружном) направлениях

В этом случае уравнение совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для тонкостенных осесимметричных оболочек в цилиндрической системе координат запишется в виде

$$\frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\exp(e_\theta - e_m)}{\rho}, \tag{6}$$

где e_θ – тангенциальные (окружные) логарифмические деформации; e_m – меридиональные логарифмические деформации; φ_0 и φ – угол между касательной к рассматриваемому элементу оболочки в меридиональном сечении и горизонталью до деформирования и в процессе формообразования соответственно.

Таким образом, получены уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для объёмного и плоского осесимметричного деформированного состояния (5), а также для тонкостенных осесимметричных оболочек в цилиндрической системе координат (6).

Использование этих уравнений позволит значительно уменьшить погрешности расчётов при анализе широкого ряда процессов обработки металлов давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сторожев, М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
2. Смирнов-Аляев, Г. А. Теория пластических деформаций металлов. Механика конечного формоизменения / Г. А. Смирнов-Аляев, В. М. Розенберг. – Л.: Машгиз, 1956. – 367 с.
3. Чумадин, А. С. Теория и расчёт процессов листовой штамповки (для инженеров) / А. С. Чумадин. – 2-е изд. – М.: Экспосервис «ВИП», 2014. – 216 с.

4. Дуйшеналиев, Т. Б. Градиенты перемещения в координатах Лагранжа и Эйлера / Т. Б. Дуйшеналиев, А. С. Дуйшембиев // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2018. – № 2 (46). – С. 36-39.
5. Агапов, М. С. Численное решение задачи сильного нелинейного деформирования в координатах Эйлера / М. С. Агапов, Е. Б. Кузнецов, В. И. Шалашилин // Учёные записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. – 2007. – Т. 149. – № 4. – С. 45-57.
6. Бормотин, К. С. Численный метод оптимизации кинематической схемы формообразования панелей двойной кривизны / К. С. Бормотин, К. Е. Герасимов, М. И. Романютин // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № VII-1 (47). – С. 59-69.
7. Отряскина, Т. А. Исследование деформационных процессов при трении / Т. А. Отряскина, М. В. Хортик // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № III-1 (43). – С. 104-109.
8. Пицык, В. С. Исследование структуры и свойств физического контакта неразъёмного соединения, созданного холодной тугой посадкой вала во втулку из сплава ОТ4-1 / В. С. Пицык, Э. А. Дмитриев, В. И. Муравьев // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № I-1 (49). – С. 69-75.
9. Разработка новых структур многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям / А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, В. И. Одиноков, Е. П. Иванкова, Г. И. Усанов, В. В. Петров // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № VII-1 (47). – С. 104-107.
10. Сысоев, О. Е. Исследование собственных колебаний и напряжённо-деформированного состояния замкнутого кольца при местном нагреве / О. Е. Сысоев, А. Ю. Добрышкин, С. Н. Нейн // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № I-1 (33). – С. 34-38.