Чепурнова Е. К., Андрианов И. К.
E. K. Chepurnova, I. K. Andrianov

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТОИМОСТЬ И КОЛИЧЕСТВО ПРОДАВАЕМЫХ УСЛУГ

MATHEMATICAL MODEL OF PROFIT OPTIMIZATION WITH RESTRICTIONS ON THE COST AND NUMBER OF SOLD SERVICES

Чепурнова Елена Константиновна – магистрант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: el.chep@bk.ru.
Elena K. Chepurnova – Master's Degree Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: el.chep@bk.ru.

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – PhD in Engineering, Assistant Professor, Aircraft Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Аннотация. В исследовании построена математическая модель условной оптимизации прибыли при ограничениях на количество продаваемых услуг, стоимость единицы услуги. При построении модели оптимизации учитывалась предыстория продаж услуг. Ввиду нелинейности системы уравнений оптимизации целевой функции использовался метод множителей Лагранжа. Поиск оптимальных значений количества продаваемых услуг проводился в последовательных приближениях с помощью метода Ньютона-Рафсона. С целью проверки сходимости итерационного алгоритма решения проведена серия численных экспериментов для заданных условий продаж, найдены оптимальные значения стоимости и количества продаваемых услуг, обеспечивающих максимум функции прибыли.

Summary. In the study, a mathematical model of conditional profit optimization is constructed with restrictions on the number of services sold and the cost of a unit of service. When building the optimization model, the background of sales of services was taken into account. Due to the nonlinearity of the system of equations for optimizing the objective function, the Lagrange multiplier method was used. The search for optimal values of the number of services sold was carried out in successive approximations using the Newton-Raphson method. In order to verify the convergence of the iterative algorithm of the solution, a series of numerical experiments were carried out for given sales conditions, optimal values of the cost and quantity of services sold were found, providing the maximum profit function.

Ключевые слова: прибыль, сфера услуг, условная оптимизация, метод множителей Лагранжа, метод Ньютона-Рафсона.

Key words: profit, services, conditional optimization, Lagrange multiplier method, Newton-Raphson method.

УДК 519.8

На сегодняшний день в экономической сфере всё активнее продаются юридические, образовательные, психологические и прочие виды услуг. Особенностью этих услуг является то, что они требуют меньшее количество затрат по сравнению с продажей товаров, а в некоторых случаях затраты вообще отсутствуют. В результате возникает проблема: какую стоимость должна иметь услуга, чтобы обеспечить достаточный спрос и максимальную прибыль? При этом, как правило, количество продаваемых услуг за фиксированный промежуток времени ограничено, что с практической стороны обусловлено физическими возможностями продавца оказать *n*-е количество услуг за день, неделю, месяц или другой временной промежуток. В большинстве случаев продавец ориентируется на среднерыночную стоимость услуги. Однако многое зависит от качества выполняемых услуг и спроса. При небольшой стоимости спрос на услугу вырастет, и продавец, ввиду ограничений на количество оказываемых услуг, не сможет обеспечить баланс спроса и предложения. В противоположной ситуации, при высокой стоимости услуги, предложение превысит спрос и продавец потеряет потенциальных покупателей и возможный доход. Соответственно, возникает проблема оптимального выбора стоимости и количества услуг при максимизации прибыли.

Описанная проблема требует применения методов экономического анализа, которые неразрывно связаны с областью математического моделирования. *Актуальность исследования* обусловлена тем, что сфера услуг стала активно развиваться в последнее десятилетие. Динамично развивающиеся экономические процессы требуют быстрой реакции и эффективных алгоритмов для принятия решений в вопросе конкурентной борьбы за место на рынке услуг. Практическая значимость математических моделей оптимизации в области сферы услуг обусловлена тем, что их применение позволит существенно рационализировать затраты и количество продаваемых услуг.

Новизна исследования обусловлена новой постановкой задачи оптимизации, где предложена целевая функция оптимизации прибыли, которая зависит от предыстории продаж, ограничений на стоимость единицы услуги и количество продаваемых услуг. В рамках исследования разработаны численная методика, новая программа для ЭВМ и получены новые результаты, позволяющие сопоставить различные варианты продаж услуг с целью максимизации прибыли. Следует отметить, что в современных экономических исследованиях, как правило, основные вопросы оптимизации прибыли решаются с помощью прикладных методов для конкретных объектов исследования [1–14]. Согласно анализу современного состояния вопроса исследования, методы математического анализа, моделирования и прогнозирования в сфере экономики и других областях рассмотрены в трудах [15–17]. Среди зарубежных исследований, посвящённых вопросам моделирования оптимизационных процессов экономики, можно отметить работы [18–20]. Отличием данного исследования является предложенная постановка задачи оптимизации прибыли в обобщённой формулировке, что обеспечивает применимость предложенной модели условной оптимизации в любой из областей сферы услуг, а именно продаже юридических, образовательных, психологических услуг, а также услуг индустрии красоты и т. д.

Таким образом, *объектом исследования* являлась сфера продажи услуг, *предметом исследования* – соотношение между стоимостью и количеством продаваемых услуг, оптимизирующее прибыль. *Цель исследования* заключалась в оптимизации прибыли при продаже услуг с ограничениями на стоимость за единицу услуги и возможное количество оказываемых услуг за фиксированный промежуток времени. В соответствии с поставленной целью определены *задачи исследования*: построение модели условной оптимизации прибыли, разработка численного подхода для решения задачи нелинейной оптимизации с помощью *методов исследования* (метода множителей Лагранжа и метода Ньютона-Рафсона); разработка программного алгоритма и проведение серии расчётов для оценки сходимости предложенной численной методики оптимизации прибыли.

При рассмотрении задачи условной оптимизации целевой функцией являлась прибыль П, определяемая разностью дохода и затрат на продажу услуг:

$$\Pi = (S - Z)n - P, \tag{1}$$

где S – стоимость единицы услуги; Z – затраты продавца на продажу единицы услуги; n – количество проданных услуг за фиксированное время t; P – прочие расходы.

Поскольку оптимизация прибыли (1) зависит от качества оказываемых услуг и спроса, важной представляется предыстория продаж. Поскольку с ростом стоимости количество продаваемых услуг снижается ввиду снижения потребительского спроса, опишем изменение стоимости S от количества проданных услуг n убывающей показательной функцией:

$$S = S_0 a^{-n}, \tag{2}$$

где S_0, a – константы, определяемые из предыстории продаж.

Рассмотрим смысл констант, входящих в уравнение (2): S_0 представляет собой критическую стоимость, выше которой отсутствует потребительский спрос (при $n = 0$, $S = S_0$). Константа a определяется отношением критической стоимости S_0 к стоимости $S_1 = S_0 a^{-1}$, при которой обеспечивается единичный спрос на услугу за время t:

$$a = \frac{S_0}{S_1}. \qquad (3)$$

Если известна информация о том, при какой стоимости нет спроса S_0 и при каком снижении цены на r, %, будет обеспечен единичный спрос S_1 на услугу, то константа a может быть определена согласно табл. 1.

Таблица 1

Соотношение снижения r критической стоимости для обеспечения единичного спроса от основания a показательной функции (3)

Процент снижения критической стоимости для обеспечения единичного спроса: $r = (S_0 - S_1) \cdot 100\% / S_0$	Основание a функции (2)
1 %	1,01
10 %	1,11
20 %	1,25
50 %	2

Если информация о единичном спросе отсутствует, но имеются данные о спросе m покупателей при стоимости услуги S_m и спросе l покупателей при стоимости услуги S_l константы a, S_0 могут быть определены из условий

$$\left.\begin{aligned} S_m &= S_0 a^{-m} \\ S_l &= S_0 a^{-l} \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Решая систему (4), получим значения требуемых констант:

$$a = \left(\frac{S_m}{S_l}\right)^{\frac{1}{l-m}}, \qquad S_0 = S_m \left(\frac{S_m}{S_l}\right)^{\frac{m}{l-m}}.$$

Согласно максимизации целевой функции П, переменными оптимизации являются стоимость единицы услуги S и количество n проданных услуг:

$$\Pi_{\max} = \max_{S,n} \Pi.$$

Поскольку количество проданных услуг n за фиксированный промежуток времени не может превышать предельное значение n^*, а стоимость товаров не может быть меньше затрат на реализацию услуги $Z < S$, постановка задачи условной оптимизации примет вид

$$\begin{gathered} \Pi = (S - Z)n - P \to \max, \\ S - S_0 a^{-n} = 0, \\ n - n^* \le 0, \\ Z - S < 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

Для решения задачи оптимизации с ограничениями вида равенств и неравенств (5) применим метод множителей Лагранжа [17]. Функция Лагранжа в данном случае примет вид

$$L(S, n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0(Sn - Zn - P) + \lambda_1(S - S_0 a^{-n}) + \lambda_2(n - n^*) + \lambda_3(Z - S), \qquad (6)$$

где $\lambda\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ – множители Лагранжа.

Для удовлетворения необходимого условия экстремума найдём частные производные функции (6) по S, n и составим систему для поиска оптимального решения:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_0 n + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_0(S - Z) + \lambda_1 S_0 a^{-n} \ln a + \lambda_2 = 0 \\ S - S_0 a^{-n} = 0 \\ \lambda_2(n - n^*) = 0 \\ \lambda_3(Z - S) = 0\end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Решением системы (7) будет являться точка $X(S;\ n; \lambda_0;\ \lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3)$. Рассмотрим случаи при $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$; $n \neq n^*$ и $n = n^*$:

1. Если $\lambda_0 = 0, n \neq n^*$, учитывая, что $S \neq Z$, получим, что весь вектор $\lambda\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ является нулевым. Соответственно, единственность решения задачи (7) не достигается.

2. Если $\lambda_0 = 0, n = n^*$, то искомое решение достигается на границе допустимой области $n \leq n^*$ в точке

$$X\left(S_0 a^{-n^*};\ n^*;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\right).$$

Тогда эффективная прибыль согласно (5) будет определяться соотношением

$$\Pi_{\max} = \left(S_0 a^{-n^*} - Z\right) n^* - P. \qquad (8)$$

3. Если $\lambda_0 = 1, n \neq n^*$ система (7) примет вид

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 = -n \\ (S - Z) - nS_0 a^{-n} \ln a = 0 \\ S - S_0 a^{-n} = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0\end{array}\right\}. \qquad (9)$$

Решение системы (9) сводится к решению нелинейного уравнения относительно n:

$$S_0 a^{-n}(1 - n \ln a) - Z = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) ввиду нелинейности не имеет аналитического решения, поэтому решение будем проводить в последовательных приближениях с помощью метода Ньютона-Рафсона [17], согласно итерационной схеме:

$$\begin{gathered} n^{(k+1)} = n^{(k)} + \psi^{(k)}, \\ \psi^{(k)} = \gamma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^{-1}\left[S_0 a^{-n^{(k)}}\left(1 - n^{(k)} \ln a\right) - Z\right], \end{gathered} \qquad (11)$$

где k – номер итерации; φ – левая часть уравнения (10) в k-м приближении; γ – коэффициент $-1 < \gamma < 0$ для обеспечения сходимости итерационного процесса согласно условию $|1 + \gamma\, \partial\varphi/\partial n| < 1$.

Критерий остановки итерационного процесса

$$\left|\frac{n^{(k+1)} - n^{(k)}}{n^{(k+1)}}\right| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность расчёта.

Для проверки условия максимума целевой функции используем критерий Сильвестра, согласно которому матрица Гессе в найденной точке должна быть определена отрицательно. Построим матрицу Гессе используя вторые частные производные функции Лагранжа (6):

$$L'' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial S^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial S \partial n} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial n \partial S} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial n^2} \end{pmatrix} \to L'' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & -\lambda_1 S_0 a^{-2n} \ln^2 a \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_0 \neq 0$ определитель матрицы Гессе $|L''| = -(\lambda_0)^2 < 0$, соответственно, условие максимума функции прибыли выполняется.

4. Если $\lambda_0 = 1, n = n^*$, тогда оптимальное решение достигается в граничной точке:

$$X\left(S_0 a^{-n^*};\ n^*;\ 1;\ -n^*;\ Z - S_0 a^{-n^*}(1 + n^* \ln a);\ 0\right).$$

В этом случае максимум функции прибыли аналогичен соотношению (8).

При решении задачи оптимизации прибыли оптимальное значение n может оказаться нецелым, однако из физического смысла n как количества услуг, следует что $n \in \mathbb{N}$. Соответственно, необходимо округлить полученное оптимальное решение $\hat{n}$ до ближайшего целого в меньшую и большую сторону, применив функции «пол» $\lfloor \hat{n} \rfloor$ и «потолок» $\lceil \hat{n} \rceil$, и сравнить значения прибыли при данных значениях:

$$\begin{gathered} \lfloor \hat{n} \rfloor = \max\{h \in \mathbb{N} \mid h \leq \hat{n}\}, \\ \lceil \hat{n} \rceil = \min\{h \in \mathbb{N} \mid h \geq \hat{n}\}. \end{gathered} \tag{12}$$

По найденным значениям $\lfloor \hat{n} \rfloor$ и $\lceil \hat{n} \rceil$ согласно (12) определяются значения функции прибыли и выбирается оптимальное значение из условия

$$\Pi_{\max} = \max\left\{\left(S_0 a^{-\lfloor \hat{n} \rfloor} - Z\right)\lfloor \hat{n} \rfloor - P;\ \left(S_0 a^{-\lceil \hat{n} \rceil} - Z\right)\lceil \hat{n} \rceil - P\right\}.$$

Стоимость единицы услуги из условия максимизации прибыли определяется

$$S_{\text{opt}} = \frac{\Pi_{\max} + P}{n_{\text{opt}}} + Z, \qquad n_{\text{opt}} = [n]|_{\Pi \to \max},$$

где $[\hat{n}]|_{\Pi \to \max}$ – округлённое до целого количество услуг, доставляющее максимум функции.

Если оптимальное решение для количества услуг превышает предельное значение $\hat{n} \geq n^*$, то максимальная прибыль будет достигаться при $n_{\text{opt}} = n^*$:

$$\Pi_{\max} = \left(S_0 a^{-n^*} - Z\right)n^* - P, \qquad S_{\text{opt}} = S_0 a^{-n^*}.$$

Кроме того, интерес представляет частный случай оптимизации функции прибыли, когда затраты несущественны и ими можно пренебречь в формуле (5) при $Z = 0, P = 0$:

$$\Pi = S_0 a^{-n} n. \tag{13}$$

Используя необходимое и достаточное условия экстремума функции (13), получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = (1 - n \ln a) S_0 a^{-n} = 0 \ \to \hat{n} = \frac{1}{\ln a}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial n^2} = [a^{-n}(\ln a^n - 1) - 1] a^{-n} S_0 \ln a < 0. \tag{15}$$

Подставим найденное значение $\hat{n}$ из (14) в соотношение (15):

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial n^2}\right|_{n = \hat{n}} = -\frac{S_0 \ln a}{e} < 0. \tag{16}$$

Отрицательность соотношения (16) следует из $\ln a > 0$, т. к. $a > 1$. Соответственно, требуемые условия достижения максимума функции прибыли выполняются, и оптимальная прибыль может быть определена из условий

$$\Pi_{\max} = \max\left\{S_0 a^{-\left\lfloor\frac{1}{\ln a}\right\rfloor}\left\lfloor\frac{1}{\ln a}\right\rfloor;\ S_0 a^{-\left\lceil\frac{1}{\ln a}\right\rceil}\left\lceil\frac{1}{\ln a}\right\rceil\right\}. \quad (17)$$

Представленная математическая модель (5) и численная методика расчёта оптимизации прибыли были запрограммированы в среде MathCad 15 согласно алгоритму, представленному на блок-схеме (см. рис. 1).

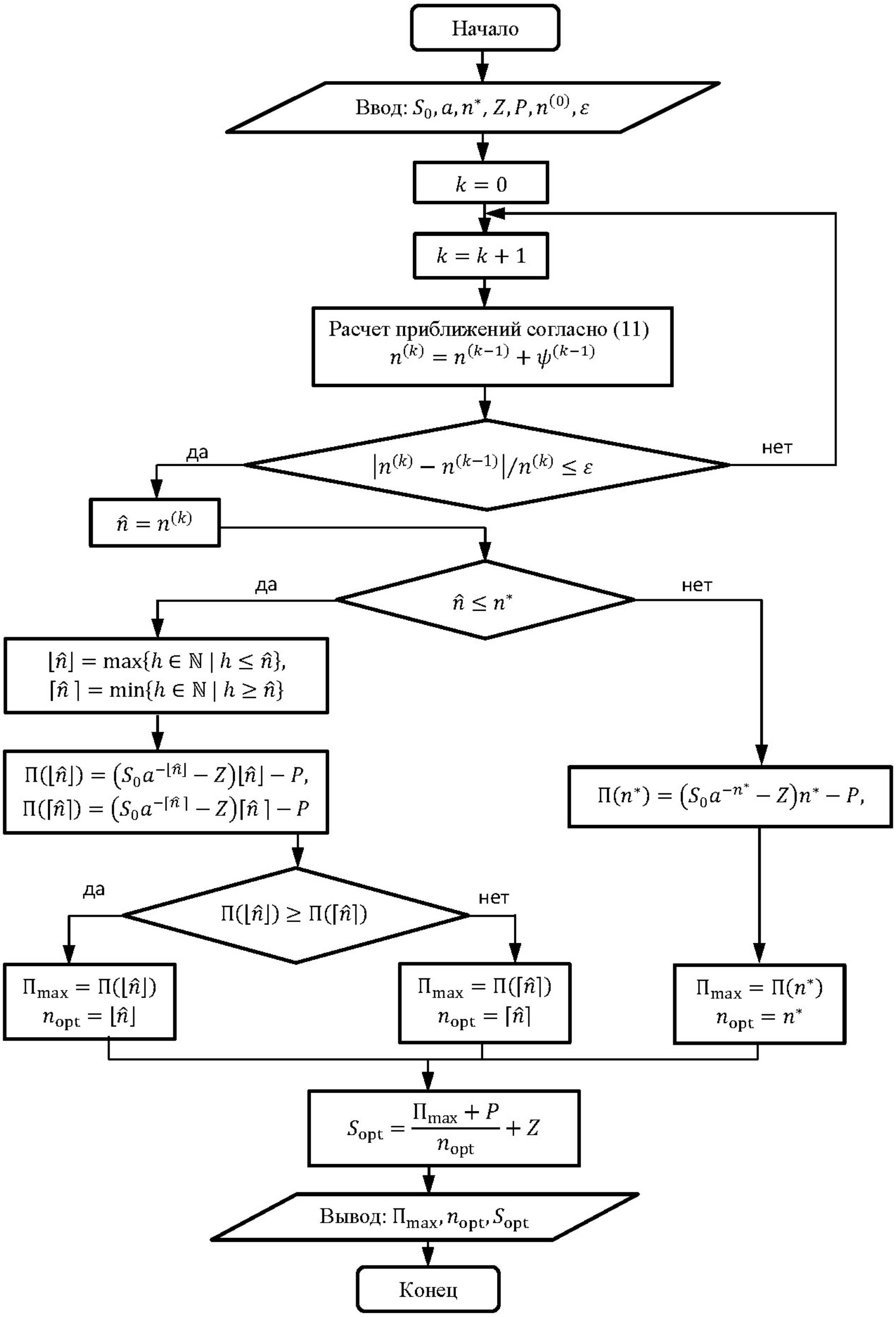

Рис. 1. Блок-схема расчёта условной оптимизации прибыли

Сопоставим результаты расчётов, задав условия оптимизации: пусть стоимость услуги, начиная с которой нет спроса $S_0 = 1$; затраты на расходы составляют 10 % от критической стоимости, т. е. $Z = 0{,}1$. Ограничение по количеству продаваемых услуг за рассматриваемый период: $n^* = 100$. Для проведения итерационного процесса: начальное приближение $n^{(0)} = 0$, $\gamma = -0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Результаты расчёта проведены при различных условиях снижения критической стоимости для обеспечения единичного спроса $r\{1\ \%; 10\ \%; 20\ \%; 50\ \%\}$ (см. табл. 2 и рис. 2).

Таблица 2

Результаты условной оптимизации прибыли

$r, \%$	$\hat{n}$	$\lfloor \hat{n} \rfloor$	$\lceil \hat{n} \rceil$	$S(\lfloor \hat{n} \rfloor)$	$S(\lceil \hat{n} \rceil)$	$\Pi_{\max}$	S_{opt}	n_{opt}
1	78,5	78	79	0,460	0,456	28,09	0,456	79
10	7,49	7	8	0,481	0,434	2,67	0,48	7
20	3,50	3	4	0,512	0,410	1,24	0,410	4
50	1,13	1	2	0,5	0,25	0,4	0,5	1

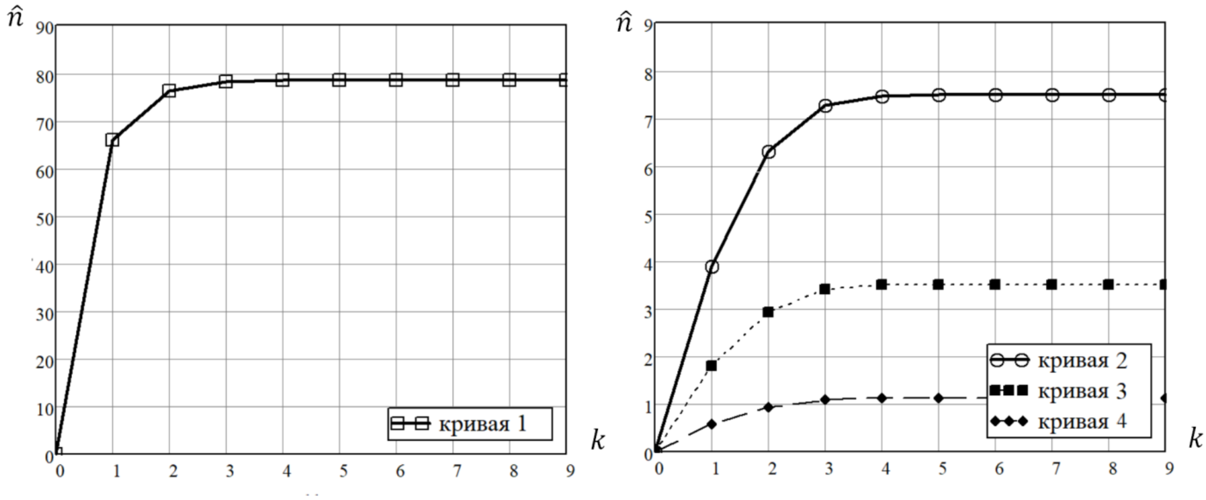

Рис. 2. Зависимость расчётного значения количества продаваемых услуг $\hat{n}$ от количества итераций k: $1 - r = 1\ \%$, $2 - r = 10\ \%$, $3 - r = 20\ \%$, $4 - r = 50\ \%$

На рис. 2 видно, что сходимость итерационного процесса при определении оптимального количества n_{opt} продаваемых услуг достигается за 5 итераций. В табл. 2 представлены данные о максимальной прибыли $\Pi_{\max}$, сочетании оптимальной стоимости за единицу услуги S_{opt} и количества n_{opt} продаваемых услуг за фиксированный промежуток времени. Результаты исследования показывают, что высокая стоимость за единицу услуги не всегда обеспечивает максимум прибыли, как и большое количество продаваемых услуг.

Зависимость прибыли от количества продаваемых услуг представлена для частного случая (13), (17) на рис. 3. Полученные кривые наглядно демонстрируют наличие максимума функции прибыли и её снижение при большом количестве продаваемых услуг, поскольку стоимость единицы услуги в этом случае снижается.

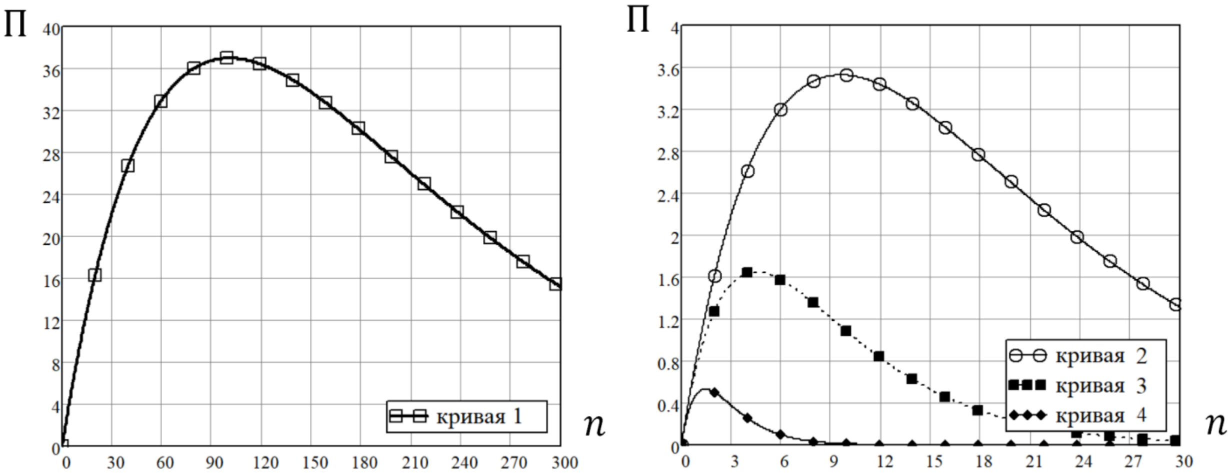

Рис. 3. Зависимость прибыли от количества проданных услуг при $Z = 0, P = 0$:
$1 - r = 1$ %, $2 - r = 10$ %, $3 - r = 20$ %, $4 - r = 50$ %

Таким образом, построенная модель условной оптимизации прибыли и предложенная численная методика поиска оптимального решения имеют важную *практическую значимость* в экономической сфере, поскольку позволят на практике определить оптимальную стоимость единицы услуги, количество продаваемых услуг, тем самым повысив эффективность продаж и финансовый доход.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темукуева, Ж. Х. Снижение себестоимости в системе максимальной оптимизации объёмов прибыли / Ж. Х. Темукуева // Экономика и социум. – 2016. – № 7 (26). – С. 323-325.
2. Мураховская, И. А. Модели (методы) оптимизации прибыли предприятия / И. А. Мураховская // Студенческий вестник. – 2020. – № 12-3 (110). – С. 59-60.
3. Ермакова, М. С. Учётная политика как инструмент оптимизации налоговых платежей по налогу на прибыль в компаниях / М. С. Ермакова // Экономика и предпринимательство. – 2020. – № 7 (120). – С. 1171-1174.
4. Ланцова, Н. М. Оптимизация распределение прибыли предприятия в сфере энергетики как приоритетный фактор роста и инновационного развития / Н. М. Ланцова, О. В. Зырянова // Вестник образовательного консорциума Среднерусский университет. Серия: Экономика и управление. – 2019. – № 13. – С. 23-26.
5. Бурыкин, А. Д. Оптимизация механизма формирования и распределения прибыли предприятия / А. Д. Бурыкин, В. А. Селезнева // Учёт и контроль. – 2019. – № 3 (41). – С. 50-58.
6. Горбунов, П. М. Оптимизация товарных потоков для увеличения прибыли организации / П. М. Горбунов // Научно-исследовательский центр «Вектор развития». – 2021. – № 3. – С. 265-273.
7. Морева, В. В. К вопросу оптимизации распределения прибыли в современных условиях / В. В. Морева, А. В. Дубинин // Научный вестник Невинномысского государственного гуманитарно-технического института. – 2018. – № 3-4. – С. 172-176.
8. Гончаренко, В. М. Об экономической корректности прикладных математических задач / В. М. Гончаренко, Л. В. Липагина // Современная математика и концепции инновационного математического образования. – 2019. – Т. 6. – № 1. – С. 285-293.
9. Старчак, Д. И. Особенности анализа переменных и постоянных затрат / Д. И. Старчак, Р. Р. Козырев, В. В. Кувалакин // Colloquium-Journal. – 2020. – № 2-11 (54). – С. 35-37.
10. Филиппов, Е. С. Анализ доходов и расходов предприятия и пути их оптимизации / Е. С. Филиппов, Э. О. Иремадзе // Colloquium-Journal. – 2018. – № 6-5 (17). – С. 52-54.
11. Мякинькая, В. В. Оптимизация ценообразования на предприятиях с помощью инструментов раздельного управленческого учёта / В. В. Мякинькая // Бухгалтерский учёт и анализ. – 2019. – № 4 (268). – С. 23-28.
12. Кацупеев, А. А. Модели и алгоритмы, применяемые для оптимизации маршрутов и ценообразования пассажирских железнодорожных перевозок / А. А. Кацупеев, Э. О. Комбарова // Вестник молодёжной науки России. – 2019. – № 5. – С. 2.

13. Алешина, А. В. Максимизация маржинальной прибыли при известных кривых спроса / А. В. Алешина, А. Л. Булгаков // Микроэкономика. – 2021. – № 6. – С. 34-39.
14. Оптимизационно-сетевое обслуживание в лесной промышленности / В. И. Максименко [и др.] // Вестник Института дружбы народов Кавказа (Теория экономики и управления народным хозяйством). Экономические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 7.
15. Полшков, Ю. Н. Прикладные методы анализа, моделирования и прогнозирования в сфере экономики труда: инновации, региональные риски, проблемы управления / Ю. Н. Полшков // Вестник Донецкого национального университета. Серия В. Экономика и право. – 2021. – № 1. – С. 179-187.
16. Борисова, М. В. Компьютерная реализация процедур линейного программирования / М. В. Борисова, К. И. Недопёкина // Академия педагогических идей Новация. Серия: Студенческий научный вестник. – 2019. – № 3. – С. 47-51.
17. Зенков, А. В. Численные методы / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.
18. Kumar, V., Pandey, R., Goyal, S. Cost and Profit Optimization and Mathematical Modeling Solutions to Stochastic Processes in Inventory System // International Journal of Innovations in Engineering and Technology. – 2017. – V. 8. – P. 205-223. DOI: 10.21172/ijiet.81.029.
19. Frick, K. Micro-Costing Quantity Data Collection Methods. Medical care. – 2009. – N 47. – P. 76-81. DOI: 10.1097/MLR.0b013e31819bc064.
20. Zavvar, S., Mirzazadeh, A., Maass, E. Ozturkoglu, Y., Mohammadi, M., Moslemi, S. A mathematical model and optimization of total production cost and quality for a deteriorating production process. Cogent Mathematics. – 2016. – № 3. DOI: 10.1080/23311835.2016.1264175.