

Андрианов И. К., Палков К. А., Чепурнова Е. К.
I. K. Andrianov, K. A. Palkov, E. K. Chepurnova

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ

THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION IN FINITE ELEMENT MODELING OF THE CRACK PROBLEM

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Ivan K. Andrianov – PhD in Engineering, Assistant Professor, Aircraft Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Палков Константин Алексеевич – студент Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: pka.knastu@gmail.com.

Konstantin A. Palkov – Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: konstantin.palkov01@gmail.com.

Чепурнова Елена Константиновна – магистрант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: el.chep@bk.ru.

Elena K. Chepurnova – Master's Degree Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: el.chep@bk.ru.

Аннотация. В исследовании проведено конечно-элементное моделирование задачи о трещине отрыва с использованием принципа суперпозиции. Задача о растяжении пластины с трещиной была заменена простыми схемами нагружения: растяжением полосы без дефекта и нагружением поверхности трещины пластины. Сравнительный анализ для различных схем нагружения проводился для интенсивности напряжений, интенсивности относительных деформаций и результирующих перемещений. Представлены результаты использования принципа суперпозиции для линейно-упругой модели материала и упругопластической модели с линейным упрочнением.

Summary. In the study, finite element modeling of the crack problem using the superposition principle was carried out. The problem of stretching a plate with a crack was replaced by simple loading schemes: stretching a strip without a defect and loading the crack surface of the plate. A comparative analysis for various loading schemes was carried out for the intensity of stresses, the intensity of relative deformations and the resulting displacements. The results of using the superposition principle for a linear elastic model of a material and an elastic-plastic model with linear hardening are presented.

Ключевые слова: трещина, пластина, принцип суперпозиции, конечно-элементная модель.

Key words: crack, plate, superposition principle, finite element model.

Научное исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10114 «Разработка системы диагностирования поврежденных турбинных лопаток и способа оптимизации теплоотвода в условиях термической усталости» (<https://rscf.ru/project/22-79-10114/>).

УДК 629.7

Современное развитие методов повышения прочности изделий и конструкций неразрывно связано с оценкой трещиностойкости материалов. Первыми исследованиями в области механики разрушения занимался учёный А. А. Гриффитс [1], внёсший наибольший вклад в развитие теории

разрушения. Стоит отметить, что вопрос разрушения во многих исследованиях связывают с достижением эквивалентными напряжениями некоторого предельного значения. Однако вследствие сложного нагружения, длительного силового или теплового воздействия, а также вследствие неоднородностей самого материала причинами разрушения могут являться появление или развитие уже имеющихся трещин в материале. Данный подход к оценке прочностного ресурса изделия особенно важен при исследовании напряжённо-деформированного состояния лопаток турбин, которые разрушаются вследствие зарождения трещины и последующего отрыва части лопатки. Турбинные лопатки в процессе эксплуатации подвергаются воздействию различного рода нагрузок, соответственно, для разработки методов термопрочностной защиты лопаток, а также подходов для диагностирования трещин в этих элементах турбомашин необходима методика, адекватно отражающая напряжённо-деформированное состояние тел с трещинами [2–7]. В этой связи становится актуальным вопрос о системе допущений, позволяющих упростить постановку исследуемой задачи. Одним из эффективных подходов при решении задач о трещинах является использование принципа суперпозиции. Поэтому в данной работе требовалось провести конечно-элементное моделирование задачи о трещине и оценить допустимость использования принципа суперпозиции для модели линейно-упругого материала и упругопластического материала с линейным упрочнением.

Согласно анализу литературных источников на сегодняшний день при решении задач о трещинах достаточно часто используют принцип суперпозиции, который позволяет существенно упростить решение задачи, в частности задачи линейной теории упругости. Согласно данному принципу сложная система нагрузок заменяется суммой более простых. Результат для сложной задачи будет равен сумме результатов отдельных простых задач [1]. Известно, что при решении задачи о трещине напряжения вне области трещины возрастают, устремляясь к бесконечности по мере приближения к вершине трещины, поэтому в вершине трещины практически всегда развивается пластическая область деформирования. Однако в инженерной практике ввиду простоты методов расчёта линейной механики разрушения используется теория А. Гриффитса. Кроме того, данная теория может быть использована для упругопластического материала в том случае, если зона пластичности в вершине трещины не превышает её берегов.

Рассмотрим применение принципа суперпозиции для пластины с трещиной, нагруженной напряжением σ (схема I на рис. 1). Данную задачу можно представить в виде суммы двух простых задач. По схеме III (см. рис. 1) рассматривается растяжение пластины без дефекта, а по схеме II нагрузка приложена по поверхности трещины [1].

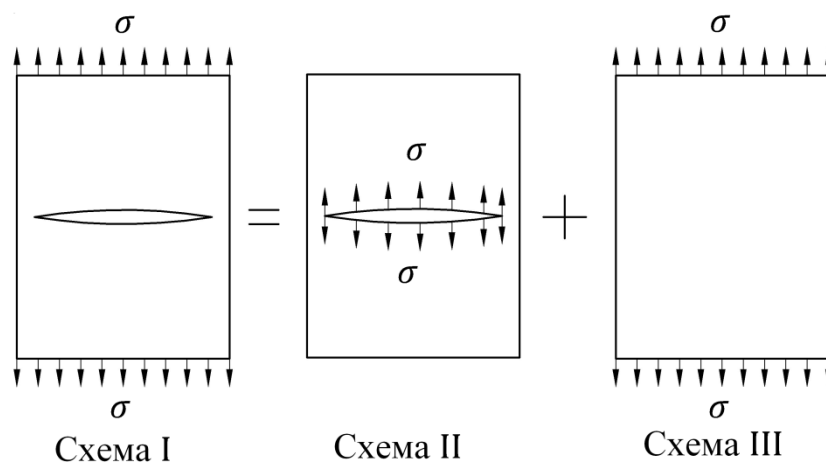


Рис. 1. Использование принципа суперпозиции в задаче о трещине

Активное развитие и внедрение в производство программных пакетов конечно-элементного анализа даёт возможность провести численный расчёт задачи о трещине. С этой целью будем использовать CAE-программную систему ANSYS 19.

Ввиду наличия осей симметрии задачи будем строить конечно-элементную модель для четверти пластины с трещиной при следующих граничных условиях (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}\Omega_{AB}: u_z = u_y = 0, \quad \theta_{xy} = \theta_{zy} = \theta_{zx} = 0, \\ \Omega_{CD}: u_x = u_y = 0, \quad \theta_{xy} = \theta_{zy} = \theta_{zx} = 0,\end{aligned}$$

где u_x, u_y, u_z – перемещения вдоль осей Ox, Oy, Oz ; $\theta_{xy}, \theta_{yz}, \theta_{zx}$ – вращения в плоскостях xOy, yOz, zOx .

В случае схем нагружения I и III (см. рис. 1) напряжение прикладывалось по краям пластины: $\sigma_z = p$, где p – внешнее давление, а в схеме II – по берегам трещины $\sigma_z = -p$.

Для проведения сравнительного анализа напряжённо-деформированного состояния для схем нагружения I, II, III (см. рис. 1) введём $\xi\{\sigma_i; \varepsilon_i; u\}$ – вектор результатов расчёта, где искомыми величинами являются:

– интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения;

– интенсивность относительных деформаций:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \mu')} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные относительные деформации; μ' – эффективный коэффициент Пуассона, $\mu' = \mu$ при $\varepsilon_i \leq \varepsilon_T$, $\mu' = 0,5$ при $\varepsilon_i > \varepsilon_T$, здесь μ – коэффициент Пуассона при упругом деформировании, ε_T – относительная деформация, соответствующая пределу текучести;

– результирующие перемещения:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Погрешность применения принципа суперпозиции при оценке напряжённо-деформированного состояния пластины с трещиной будем определять следующим образом:

$$\delta = \left| \frac{\xi^{(I)} - (\xi^{(II)} + \xi^{(III)})}{\xi^{(I)}} \right| \cdot 100\%,$$

где $\xi^{(I)}, \xi^{(II)}, \xi^{(III)}$ – результаты исследуемой величины по схемам нагружения I, II, III.

Условие перехода материала в стадию пластичности согласно критерию Губера-Мизеса: $\sigma_i = \sigma_T$, где σ_T – предел текучести материала.

Для контроля возможного неустойчивого развития трещины отрыва коэффициент интенсивности напряжений будем определять согласно формуле А. Гриффитса с поправкой Ирвина для геометрии данной задачи [1]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \cdot \frac{2b}{\pi l} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi l}{2b} \right),$$

где b – ширина пластины.

Условие начала быстрого роста трещины $K_I \geq K_{IC}$, где K_{IC} – вязкость разрушения.

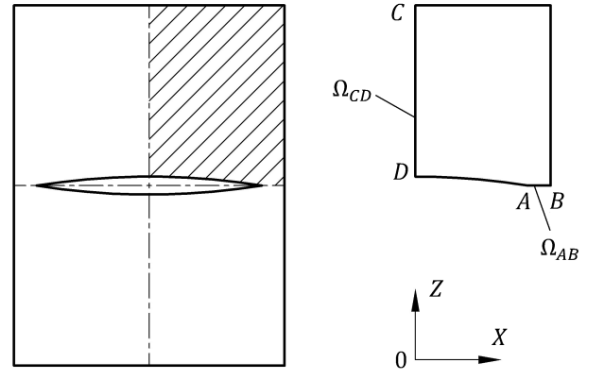


Рис. 2. Пластина с трещиной

В исследовании требовалось проверить принцип суперпозиции при упругом и упругопластическом деформированиях. С этой целью рассмотрим на первом этапе расчёт напряжённо-деформированного состояния тела с трещиной при поверхностной нагрузке $p = 30$ МПа. При такой нагрузке напряжённо-деформированное состояние остаётся в пределах упругого деформирования пластины, остаточные деформации не возникают. На втором этапе исследования рассмотрим напряжённо-деформированное состояние тела при нагрузке $p = 170$ МПа. Для данного числового значения нагрузки обеспечивается переход материала в область пластического деформирования.

В качестве материала использовался жаропрочный высоколегированный сплав 15X12ВНМФ, широко используемый в качестве материала лопаток турбин. Механические характеристики сплава 15X12ВНМФ: плотность $\rho = 7850$ кг/м³, модуль упругости I рода $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 510$ МПа, предел прочности $\sigma_B = 690$ МПа, относительное остаточное удлинение после разрыва $\delta = 18$ %. Для построения модели материала в ANSYS будем использовать упругопластическую модель с линейным упрочнением, в этом случае тангенциальный модуль $E_t = 1011$ МПа. Геометрические характеристики пластины: высота 40 мм, ширина 60 мм, толщина 1 мм. Длина трещины $l = 40$ мм. При создании конечно-элементной сетки четверти пластины было создано 1576 узлов и 204 элемента.

Результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния пластины с трещиной для линейной упругой модели материала представлены на рис. 3-5, табл. 1. При проведении численных расчётов сходимость итерационных процессов в случаях упругого деформирования при $p = 30$ МПа достигалась за 7 итераций. Коэффициент интенсивности напряжений $K_I = 6$ МПа \cdot м^{1/2}, что существенно ниже вязкости разрушения стальных сплавов согласно [9], где $K_{IC} \geq 70$ МПа \cdot м^{1/2}.

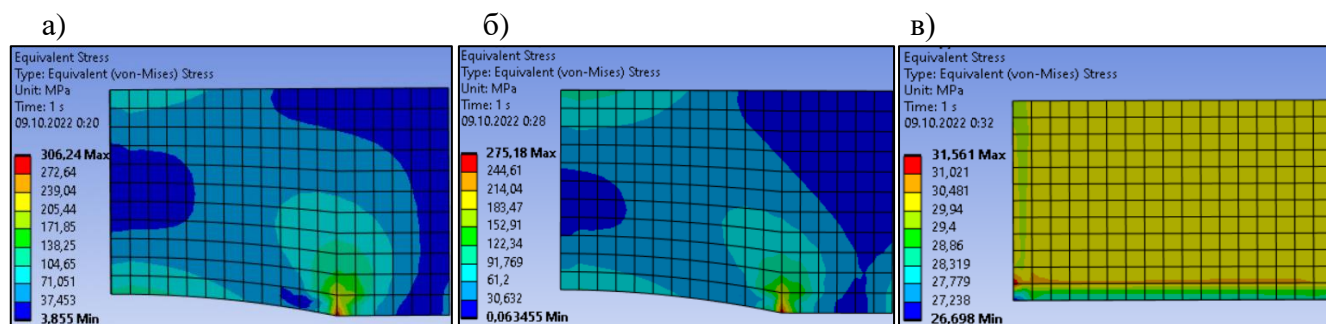


Рис. 3. Напряженное состояние (МПа) при поверхностной нагрузке 30 МПа:
а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

Оценку напряжённо-деформированного состояния будем проводить для точки A' вблизи вершины трещины при $x = l/2 + 0,1l$ и точки D (см. рис. 2), которой соответствуют максимальные перемещения берега трещины.

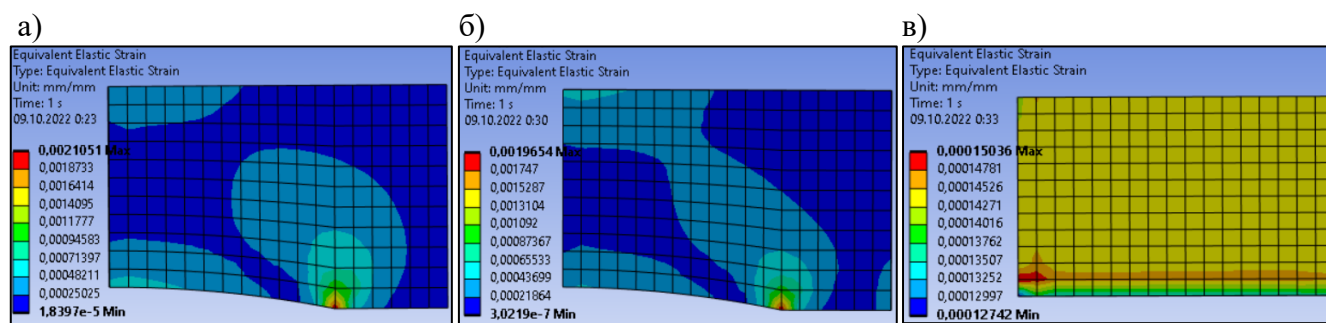


Рис. 4. Деформированное состояние при поверхностной нагрузке 30 МПа:
а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

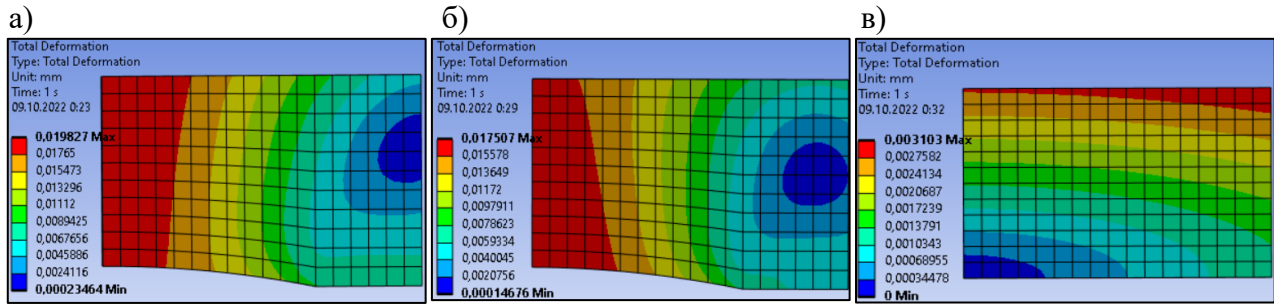


Рис. 5. Распределение перемещений (мм) при поверхностной нагрузке 30 МПа:
а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

Таблица 1

Результаты напряжённо-деформированного состояния для точек A' и D при линейно-упругом деформировании пластины с трещиной

Результаты	Результат $\xi^{(I)}$ при схеме I		Результат $\xi^{(II)}$ при схеме II		Результат $\xi^{(III)}$ при схеме III		Относительная по- грешность δ , %	
	A'	D	A'	D	A'	D	A'	D
Интенсивность напряжений $\xi = \sigma_i$, МПа	68,8	124	42,5	100	27,5	27	1,7	2,4
Интенсивность деформаций $\xi = \varepsilon_i$, %	0,032	0,04	0,018	0,03	0,013	0,01	3	0
Результирующие перемещения $\xi = u \cdot 10^2$, мм	0,65	0,019	0,57	0,017	0,07	0	1,5	6

Согласно результатам расчёта интенсивности напряжений, интенсивности относительных упругих деформаций использование принципа суперпозиции в задаче о трещине при линейно-упругом деформировании даёт небольшую погрешность – не более 3 %, для перемещений – 6 %. Следует отметить, что при использовании принципа суперпозиции основное влияние на суммарный результат расчёта напряжённо-деформированного состояния оказывают результаты при нагружении поверхности трещины согласно схеме II.

Результаты расчёта напряжённо-деформированного состояния пластины с трещиной для упругопластической модели материала при нагрузке $p = 170$ МПа представлены на рис. 6-8, табл. 2. При проведении численных расчётов сходимость итерационных процессов в случаях упругопластического деформирования достигалась за 16 итераций. Коэффициент интенсивности напряжений: $K_I = 33$ МПа \cdot м^{1/2}, что меньше вязкости разрушения материала.

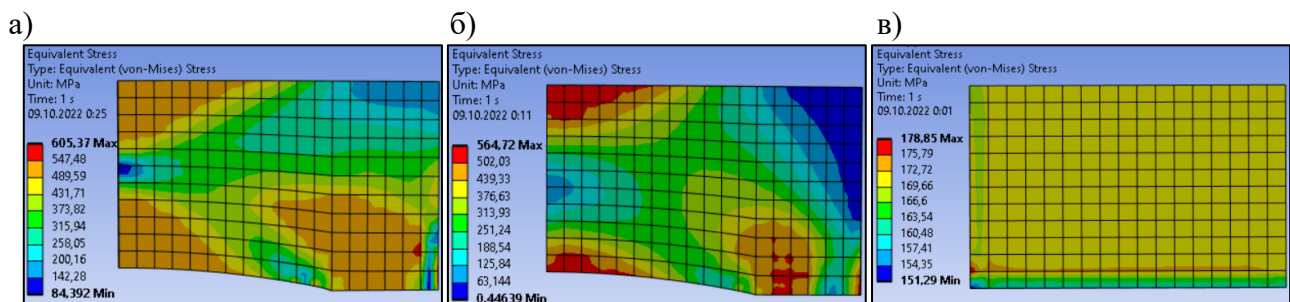


Рис. 6. Напряжённое состояние (МПа) при поверхностной нагрузке 170 МПа:
а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

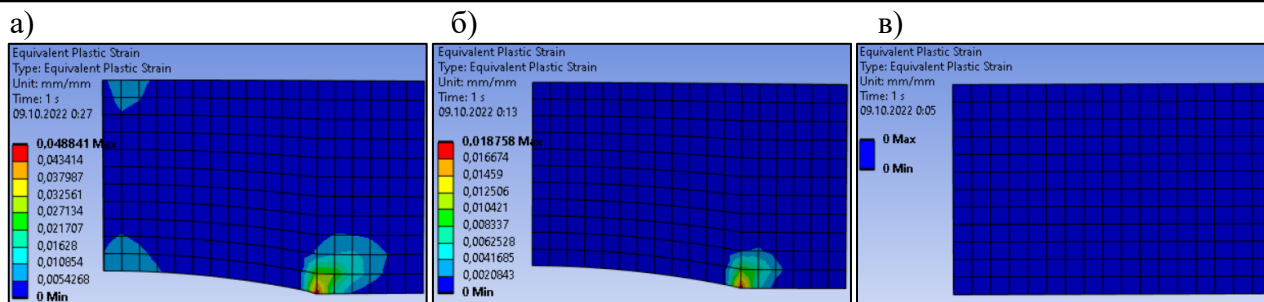


Рис. 7. Деформированное состояние при поверхностной нагрузке 170 МПа:
 а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

Согласно результатам расчёта напряжённо-деформированного состояния пластины с трещиной в области упругопластического деформирования использование принципа суперпозиции приводит к значительным погрешностям (более 20 %) для интенсивности напряжений, интенсивности относительных пластических деформаций и результирующих перемещений.

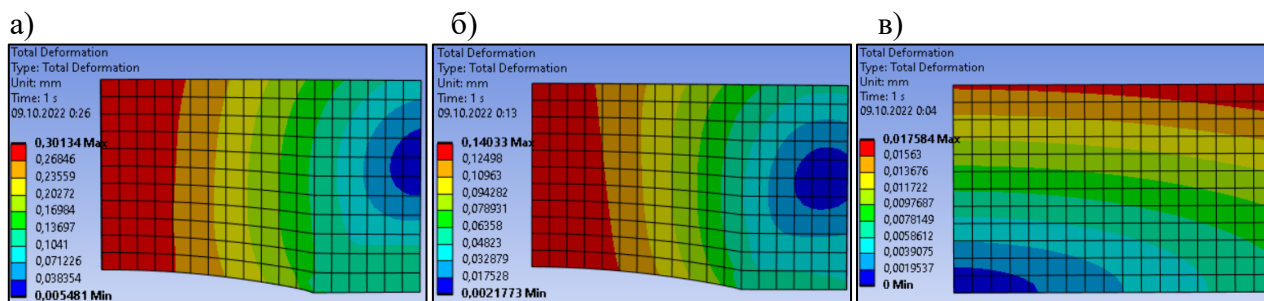


Рис. 8. Распределение перемещений (мм) при поверхностной нагрузке 170 МПа:
 а – схема нагружения I; б – схема нагружения II; в – схема нагружения III

Таблица 2

Результаты напряжённо-деформированного состояния в точках A' и D для упругопластического материала с линейным упрочнением

Результаты	Результат $\xi^{(I)}$ при схеме I		Результат $\xi^{(II)}$ при схеме II		Результат $\xi^{(III)}$ при схеме III		Относительная погрешность δ , %	
	A'	D	A'	D	A'	D	A'	D
Интенсивность напряжений $\xi = \sigma_i$, МПа	518	518	470	505	160	152	21,6	30,7
Интенсивность пластических деформаций $\xi = \varepsilon_i$, %	0,8	0,75	0,2	0	0	0	75	100
Результирующие перемещения $\xi = u$, мм	0,12	0,28	0,06	0,13	0,004	0	47	53

Таким образом, представленные результаты исследования конечно-элементного моделирования задачи о трещине позволяют сделать вывод о допустимости использования принципа суперпозиции в том случае, если рассматривается модель линейно-упругого материала или нагружения, возникающие в теле, не превосходят предела текучести. Однако в случае, если приложенные к телу нагрузки вызывают напряжения и деформации, соответствующие переходу тела в ста-

дию пластичности, применение принципа суперпозиции может привести к неадекватному результату ввиду большой погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестриков, В. М. Механика разрушения / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2012. – 552 с.
2. Анализ кинетики роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в лопатках ГТУ / А. А. Назаренко, С. Г. Семёнов, А. С. Семёнов, Л. Б. Гецов // Морские интеллектуальные технологии. – 2011. – № S3. – С. 90-93.
3. Расчётно-экспериментальная методика определения кинетики роста трещин усталости, ползучести и термической усталости в лопатках ГТУ / А. С. Семенов, С. Г. Семенов, А. А. Назаренко, Л. Б. Гецов // Тяжёлое машиностроение. – 2013. – № 11-12. – С. 7-20.
4. Лимарь, Л. В. О скачкообразном росте усталостной трещины в компрессорных лопатках / Л. В. Лимарь, Ю. А. Демина, Л. Р. Ботвина // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – № 2. – С. 36-41.
5. Закономерности развития поверхностных трещин в материале лопаток паровых турбин / А. П. Захаров, Д. А. Косов, Д. И. Федоренков, Д. В. Федотова // Труды Академэнерго. – 2019. – № 3 (56). – С. 107-121.
6. Замилев, Н. О. Моделирование развития трещины в лопатке турбины / Н. О. Замилев // Энергия-2021: тезисы докладов Шестнадцатой всероссийской (восьмой международной) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, Иваново, 06-08 апреля 2021 года. В 6 т. Т. 4. – Иваново: Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина, 2021. – С. 98.
7. Замилев, Н. О. Моделирование развития трещины в лопатке турбины / Н. О. Замилев, М. А. Шилов // Энергия-2022: Семнадцатая всероссийская (девятая международная) научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных: материалы конференции, Иваново, 11-13 мая 2022 года. В 6 т. Т. 4. – Иваново: Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина, 2022. – С. 92.
8. Крыжевич, Г. Б. Механика разрушения металлических конструкций: моногр. / Г. Б. Крыжевич. – СПб.: Крыловский государственный научный центр, 2021. – 184 с.
9. Физические величины: справочник / А. П. Бабичев [и др.]: под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.