Колыхалов Г. А., Кравченко Е. Г.
G. A. Kolykhalov, E. G. Kravchenko

ВЛИЯНИЕ ТЁМНОЙ МАТЕРИИ НА ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОЗИЦИИ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

DARK MATTER INFLUENCE ON THE TRAJECTORIES OF COSMIC BODIES FROM SOLID MODEL POSITION

Колыхалов Геннадий Антонович – начальник научно-исследовательского отдела Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: kolykhalov40@mail.ru.
Gennady A. Kolykhalov – Head of Research Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: kolykhalov40@mail.ru.

Кравченко Елена Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: ek74@list.ru.
Elena G. Kravchenko – PhD in Engineering, Assistant Professor, Mechanical Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: ek74@list.ru.

Аннотация. Рассмотрено влияние тёмной материи на траекторию движения планеты Земля. Принято, что тёмная материя является сплошной средой, континуумом, обладающим динамической вязкостью. Получен критерий, характеризующий устойчивость планеты при её движении по орбите. Приведены простейшие расчёты, определяющие некоторые временные характеристики жизни планеты.

Summary. The influence of dark matter on the trajectory of the planet Earth is considered. It is accepted that dark matter is a continuous medium, a continuum with dynamic viscosity. A criterion was obtained characterizing the stability of the planet during its movement in orbit. The simplest calculations are given that determine some time characteristics of the life of the planet.

Ключевые слова: тёмная материя, континуум, вязкость, конвекция, сопротивление, планета, гравитация, траектория, устойчивость.

Key words: dark matter, continuum, viscosity, convection, resistance, planet, gravitation, trajectory, stability.

УДК 53.091:532.5.013.4

В настоящее время существует гипотеза, что видимая нами Вселенная не является пустой, а вся заполнена материей с чрезвычайно малой плотностью. Её существование удаётся обнаружить только в рамках её гравитационного взаимодействия с видимой материей [1].

Предполагается, что тёмная материя (ТМ) состоит из частиц-атомов, которые, как и в газах, находятся в хаотичном движении и могут рассматриваться как континуум (сплошная среда). Гипотетически представляется интересным оценить влияние тёмной материи на траектории движения планет Солнечной системы, в частности Земли. Приняв, что тёмная материя представляет собой сплошную среду, будем полагать, что динамическая вязкость среды не равна нулю: $\mu_e \neq 0$. В этом случае необходимо принимать во внимание действие силы сопротивления при движении планеты по траектории и естественно-конвективного трения в радиальном направлении.

То, что известно о тёмной материи, не позволяет надёжно определить величину средней длины свободного пробега в ней частицы-атома, что является критерием сплошности среды. Положим её значение самой большой из возможных величин, при которой ещё можно считать тёмную материю как сплошную среду.

В газовой динамике известен критерий подобия Кнудсена (Kn), который характеризует степень разреженности газового потока [2]:

$$Kn = \frac{l}{L}, \tag{1}$$

где l – средняя длина свободного пробега частиц-атомов тёмной материи; L – характерный размер обтекаемого тела, в нашем случае диаметр Земли, то есть $L = 12{,}74 \cdot 10^6$ м.

Известно [2], что при числах Кнудсена порядка $Kn \sim 10^{-3}$ и ниже справедливы основные уравнения гидромеханики сплошной среды: уравнения Эйлера, Навье-Стокса, энергии.

Приняв, что верхняя граница числа $Kn = 10^{-3}$, определим, какой должна быть предельная длина свободного пробега частиц-атомов тёмной материи, при которой тёмную материю можно интерпретировать как сплошную среду. Тогда из уравнения (1) следует

$$l = Kn \cdot L = 10^{-3} \cdot 12{,}74 \cdot 10^6 = 1{,}274 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Для упрощения расчётов округлим это значение до величины $l = 10^4$ м. В рамках принятого предположения о тёмной материи как сплошной среде определим коэффициент кинематической вязкости $\nu_e, \left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right)$ [3]:

$$\nu_e = \frac{\mu_e}{\rho_e} = \frac{1}{3} \cdot V_e \cdot l,$$

где μ_e– коэффициент динамической вязкости; ρ_e – плотность газа тёмной материи; V_e – средняя скорость теплового движения частиц тёмной материи.

Из последнего соотношения следует, что число Re будет равно

$$\text{Re} = \frac{V_e \cdot l}{\nu_e} = 3, \tag{2}$$

где V_e равно скорости света С в вакууме, т. е. V_e = С = $3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Тогда из формулы (2) получим

$$\nu_e = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^4 = 10^{12} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \tag{3}$$

С целью оценки воздействия тёмной материи на траекторию движения планеты Земля вокруг Солнца воспользуемся соотношениями, полученными в работах [4–6] для силы трения $W_{е\text{-}к}$ и коэффициента трения $C_{fе\text{-}к}$ в условиях естественной конвекции (Е-К) и силы сопротивления $W_{\text{в-к}}$ и коэффициента сопротивления $C_{f\text{в-к}}$ для условий вынужденной конвекции (В-К).

В общем виде сила трения W определяется по формуле

$$W = C_f \cdot \frac{\rho_e \cdot V^2}{2} \cdot \pi r_0^2,$$

где $V = V^* = [2r_0 \cdot g_з \cdot \beta_t \cdot (T_w - T_\infty)]^{0,5}$ – значение скорости в режиме Е-К; $V = V_з$ – скорость в режиме В-К; C_f – коэффициент сопротивления (трения); r_0 – радиус Земли; $g_з$ – ускорение свободного падения на Земле; β_t – коэффициент температурного расширения газа (тёмной материи).

Соответственно, введём обозначения:

1. $C_f = C_{fe-k}$ – коэффициент сопротивления при вынужденной конвекции;
2. $C_f = C_{f\text{в}-\text{к}}$ – коэффициент естественно-конвективного трения;
3. $W = W_{e-k}$ – сила трения при Е-К;
4. $W = W_{\text{в}-\text{к}}$ – сила сопротивления при В-К.

Будем полагать, что возможное перемещение планеты в радиальном направлении Солнце-Земля под воздействием тёмной материи определяется силой трения. Перемещение происходит за счёт естественной конвекции благодаря разности температур между поверхностью планеты и окружающим планету пространством под воздействием гравитационного притяжения Земли Солнцем.

Сила сопротивления Земли $W_{\text{в-к}}$ при её движении по траектории определяется скоростью движения относительно тёмной материи.

Для определения коэффициентов C_{fe-k} и $C_{f\text{в}-\text{к}}$ предварительно подсчитаем критерии Грасгофа Gr и Рейнольдса Re.

Критерий Gr находится по формуле

$$\mathrm{Gr} = \frac{(2r_0)^3 \cdot g_{\text{з}} \cdot \beta_t \cdot (T_w - T_\infty)}{\nu_e^2}, \tag{4}$$

где T_w– температура поверхности Земли; T_∞ – температура материи Космоса,
а критерий Re – по соотношению

$$\mathrm{Re} = \frac{V_{\text{з}} \cdot \ (2r_0)}{\nu_e}, \tag{5}$$

где $V_{\text{з}}$ – скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца.

Примем

$T_\infty \ = 2{,}75$ K,

T_w= 288 K – это среднегодовая температура поверхности Земли за 2021 год,

$$\beta_t = \frac{1}{273 \text{ K}}, \quad g_{\text{з}} \approx \ 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \tag{6}$$

Подставим значения параметров из зависимостей (1), (3) и (6) в формулу (4), получим

$$\mathrm{Gr} = \frac{(12{,}8 \cdot 10^6)^3 \cdot 10 \cdot 0{,}364 \cdot 10^{-2} \cdot 285{,}25}{10^{24}} = 2{,}3 \cdot 10^{-2}.$$

Соответственно, число Re из формулы (5) будет иметь значение

$$\mathrm{Re} = \frac{V_{\text{з}} \cdot \ (2r_0)}{\nu_e} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 12{,}8 \cdot 10^6}{10^{12}} = 0{,}384 < 1.$$

Так как оба критерия Gr << 1 и Re < 1 малы, для расчёта $C_{fe\text{-}к}$ и $C_{fв\text{-}к}$ можно использовать линеаризованные уравнения Навье-Стокса и энергии.

При числах Gr < 1 значение $C_{fe\text{-}к}$ в работах [4–6] определяется из выражения

$$C_{fe-k} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{12}{\mathrm{Gr}^{0,5}}\right). \tag{7}$$

Для малых чисел Re коэффициент сопротивления при обтекании сферы, как известно, имеет значение [7]

$$C_{f\text{в}-\text{к}} = \frac{24}{\mathrm{Re}}. \tag{8}$$

Для определения сил $W_{\text{е-к}}$ и $W_{\text{в-к}}$ в силу линейности уравнений, используемых при решении задач в случаях Gr < 1 и Re < 1 воспользуемся принципом суперпозиции, независимости обоих видов движения и определим силы сопротивления независимо друг от друга, тем более они действуют во взаимно перпендикулярных направлениях. Имеем

$$W_{e-k} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{12}{\mathrm{Gr}^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \rho_e \ \cdot \frac{[2r_0 \cdot g_{\text{з}} \cdot \beta_t \cdot (T_w - T_\infty)]}{2} \cdot \pi r_0^2.$$

Умножая числитель и знаменатель правой части полученного выражения на ν_e^2 и используя формулы (4), (7) для определения Gr, путём несложных преобразований получим

$$W_{e-k} = \frac{\pi}{6} \cdot \mathrm{Gr} \cdot \left(1 + \frac{12}{\mathrm{Gr}^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \rho_e \cdot \nu_e^2. \quad (9)$$

Соответственно, с учётом формул (5), (8)

$$W_{\text{в}-\text{к}} = \frac{24}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\rho_{e \cdot V_з^2}}{2} \cdot \pi r_0^2 = 6\pi \cdot r_0 \cdot V_з \cdot \rho_e \cdot \nu_e. \quad (10)$$

Величину ρ_e определим, используя соотношение (3):

$$\nu_e = \frac{\mu_e}{\rho_e} = 10^{12}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \quad (11)$$

Так как величина вязкости μ_e для тёмной материи неизвестна, то примем её равной вязкости самого лёгкого газа водорода при нормальных условиях [3]

$$\mu_* = 8{,}4 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}\right).$$

Реальная вязкость тёмной материи должна быть намного меньше. Соответственно,

$$\rho_e = \mu_e \cdot 10^{-12} = 8{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-12} = 8{,}4 \cdot 10^{-18}\ \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right).$$

Приближённо примем $\rho_e \approx 10^{-17} \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$.

В работе [3] представлены характерные значения для плотности ρ_e: для межзвёздного вещества $\rho_e = 10^{-20}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и для межгалактического вещества $\rho_e = 10^{-26}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Тогда с учётом формулы (11), записанной в форме

$$\mu_e = 10^{12} \cdot \rho_e,$$

получим динамическую вязкость:

– для межзвёздного вещества

$$\mu_{e\ \text{м}-\text{з}} = 10^{12} \cdot 10^{-20} = 10^{-8}\ \frac{\text{н}}{\text{м} \cdot \text{с}},$$

– для межгалактического вещества

$$\mu_{e\ \text{м}-\text{г}} = 10^{12} \cdot 10^{-26} = 10^{-14}\ \frac{\text{н}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

При таких малых значениях динамической вязкости можно считать ТМ идеальной жидкостью и применять к ней все закономерности в рамках модели идеальной жидкости.

В первом приближении характерная плотность ТМ в Солнечной системе будет иметь значение

$$\rho_e = 8{,}4 \cdot 10^{-18}\ \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right) \approx 10^{-17} \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right). \quad (12)$$

Значение плотности из формулы (12) можно положить как характерное значение плотности для ТМ в Солнечной системе.

Подставим в формулы (9) и (10) значения величин, в них входящих, получим

$$W_{e-k} = \frac{3{,}14}{6} \cdot 2{,}3\ \cdot \left(1 + \frac{120}{2{,}3^{0{,}5}}\right) \cdot 10^{-17} \cdot 10^{24} = 10^7\ \text{Н},$$

$$W_{\text{в}-\text{к}} = 6 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-17} \cdot 10^{12}\ \text{Н} = 3{,}61 \cdot 10^7\ \text{Н}.$$

Величина ускорения от силы $W_{e\text{-}к}$ равна

$$a_r = \frac{W_{e-k}}{m_з} = \frac{10^7}{6 \cdot 10^{24}} = 0{,}17 \cdot 10^{-17}\ \frac{м}{с^2}.$$

Сравним это ускорение с гравитационным ускорением, создаваемым Солнцем у Земли g_c:

$$\frac{a_r}{g_c} = \frac{0{,}17 \cdot 10^{-17}}{6 \cdot 10^{-3}} = 0{,}03 \cdot 10^{-14}.$$

Эта малая доля, но она есть и направлена на удаление Земли от Солнца.

Кинетическая энергия планеты при движении по траектории определится выражением

$$А = \frac{m_з . V_з^2}{2} = \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 9 \cdot 10^8}{2} = 27 \cdot 10^{32}\ Дж,$$

где m_3 – масса Земли; $V_з$ – скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца.

Мощность N, расходуемая планетой при своём движении по орбите, определяется формулой

$$N = W_{в-к} \cdot V_з.$$

Подставим численные значения величин, получим

$$N = 3{,}61 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^4 = 10^{12}\ \frac{Дж}{с}.$$

Условное время израсходования всей кинетической энергии Земли при своём движении по орбите равно

$$t = \frac{A}{N} = \frac{27 \cdot 10^{32}}{10^{12}} = 2{,}7 \cdot 10^{21}\ с.$$

В годах это составит около ста тысяч миллиардов лет.

С момента Большого взрыва прошло около 14 миллиардов лет. По меркам Космоса срок очень мал. В простейшем варианте теории Великого объединения оценка времени жизни протона даёт значение $\sim 10^{31}$ лет. Нижний предел времени жизни протона оценивается около $6{,}5 \cdot 10^{31}$ лет [10]. Поэтому должен существовать другой источник, восполняющий эту потерю мощности и создающий силу, равную силе сопротивления $W_{в-к}$. На эту роль может претендовать ТМ.

Некоторые учёные полагают, что космические тела, в том числе и наша Земля, являются стоком для тёмной материи. Она радиально проникает в центр нашей планеты и увеличивает её массу, переходя в фазу видимой [1].

Определим величину входящей массы за единицу времени, используя соотношение для постоянства расхода через поверхность Земли в виде

$$\frac{dm_e}{dt} = \rho_e \cdot V_* \cdot S_п = \text{const}, \tag{13}$$

где $S_п = 4\pi \cdot r_0^2$ – площадь поверхности планеты Земля; V_* – скорость радиального вхождения в центр планеты тёмной материи, требует определения; m_e – масса тёмной материи.

Как известно, закон изменения количества движения при изменяющейся массе и постоянстве скорости определится выражением

$$F_р = \frac{dm_e}{dt} \cdot V_з,$$

где $F_р$ – «реактивная» сила, возникающая за счёт притока масс тёмной материи в центр Земли.

В нашем случае она действует в направлении движения планеты по касательной к траектории и определится выражением

$$F_р = \rho_e \cdot V_* \cdot S_р \cdot V_з. \tag{14}$$

Определим отношение сил

$$K = \frac{W_{в-к}}{F_р}. \quad (15)$$

Подставим в зависимость (15) выражения величин из формул (10) и (14), получим

$$K = \frac{6\pi \cdot r_0 \cdot V_з \cdot \rho_e \cdot \nu_e}{\rho_e \cdot V_* \cdot 4\pi \cdot r_0^2 \cdot V_з} = \frac{3\nu_e}{2V_e \cdot r_0}.$$

Условием устойчивого движения планеты по орбите является равенство сил сопротивления и «реактивной» силы, т. е. коэффициент K = 1 и, соответственно,

$$\mathrm{Re}_* = \frac{V_* \cdot 2r_0}{\nu_e} = 3. \quad (16)$$

Отсюда

$$V_* = \frac{3\nu_e}{2r_0}.$$

Подставим значения, получим

$$V_* = \frac{3 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 0{,}234 \cdot 10^6 \ (\text{м/с}).$$

Эта скорость составляет приблизительно около 0,08 % от скорости света.

В качестве примера рассмотрим приток тёмной материи в центр планеты за 10^{10} лет (десять миллиардов лет).

Воспользуемся выражением (13) для определения расхода:

$$\frac{dm_e}{dt} = \rho_e \cdot V_* \cdot S_п$$

и запишем его в форме

$$\Delta m = \rho_e \cdot V_* \cdot S_п \cdot \Delta t.$$

Учитывая, что в году 3,2$\cdot 10^7$ с, то $\Delta t = 3{,}2 \cdot 10^{17}$ с.

Тогда после подстановки всех значений получим приближённо $\Delta m = 4 \cdot 10^{20}$ кг.

Масса Земли 6,4$\cdot 10^{24}$ кг.

Доля притока массы тёмной материи по отношению к массе Земли за этот период составляет

$$\frac{4 \cdot 10^{20}}{6,\ 4 \cdot 10^{24}} = 0{,}625 \cdot 10^{-4} = 0{,}00625\ \%.$$

Равенство критериев Re и Re_* по формулам (2) и (16) указывает на тот интересный факт, что оно носит универсальный характер критерия Re, как для обычных газовых потоков, так и для тёмной материи.

Равенство критерия $\mathrm{Re}_* = 3$ определяет устойчивость движения по орбите. В этом случае силы, действующие на планету, взаимно уравновешены. Увеличение критерия $\mathrm{Re}_* > 3$ определяет рост «реактивной силы», и, соответственно, обеспечивается переход планеты на более высокую орбиту за счёт более высокой скорости по орбите и, соответственно, снижения g_c и увеличения a_r, т. е. нарушается устойчивость движения, при этом следует отметить, что естественная конвекция способствует в этом случае увеличению неустойчивости, т. к. она всегда направлена по радиусу Солнце-Земля вовне. При этом с ростом радиуса орбиты Земли падает сила притяжения Земли к Солнцу, т. е. убывают g_c и перепад температур $(T_w - T_\infty)$, и в конечном итоге эта сила стремится к нулю, но при этом эта сила при $\mathrm{Re}_* > 3$ является возмущающей силой.

Уменьшение $\mathrm{Re}_* < 3$ приводит к переходу планеты на более низкую орбиту, при этом увеличивается g_c, т. е. возникает тенденция к дальнейшему уменьшению радиуса орбиты, однако при этом сила W_{e-k} уже может тормозить снижение орбиты по радиусу, т. е. играет роль демпфирующей силы. Причём по мере уменьшения радиуса орбиты планеты она растёт за счёт роста g_c и роста перепада температур $(T_w - T_\infty)$. Таким образом, при уменьшении $\text{Re}_* < 3$ сила естественно-конвективного трения играет в определённой мере роль демпфирующей силы.

Сила трения при Е-К в общем случае является радиально неуравновешенной, и остаётся возможность уравновешивания этой силы, возникающей за счёт тёмной материи – это увеличить силу притяжения планеты за счёт уменьшения радиуса орбиты, и соответственно, увеличения силы тяготения планеты к Солнцу. Рассмотрим в этом ракурсе решение поставленной задачи.

Определим возможное изменение радиуса орбиты за счёт влияния естественной конвекции, для чего воспользуемся соотношениями

$$g_c = \frac{V_з^2}{r_1} \text{ и } (g_c + a_r) = \frac{V_з^2}{(r_1 - \Delta r)},$$

где r_1 – расстояние от Земли до Солнца.

При этом принимаем, что скорость движения планеты при смене орбиты не изменяется. Объединяя обе формулы, получим соотношение для определения Δr:

$$\Delta r = r_1 \cdot \frac{a_r}{(g_c + a_r)} \approx r_1 \cdot \frac{a_r}{g_c} = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{0{,}17 \cdot 10^{-17}}{6{,}3 \cdot 10^{-3}} \text{ м.}$$

Подставим значения входящих величин, приближённо получим

$$\Delta r \approx 4{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Смещение орбиты от влияния естественной конвекции практически отсутствует.

Что касается жидкости и газа, то равенство критерия Re = 3, вытекающее из формулы (2), определяет устойчивость ламинарного движения газа или жидкости (будем их объединять общим названием – жидкость).

Как известно [8], критерий Re определяет отношение инерциальных (живых) сил к силам трения. Превалирование сил инерции над силами трения и их рост ведут к неустойчивости слоистого движения жидкости, что приводит к появлению поперечных основному движению пульсаций, т. е. происходит беспорядочное перемешивание жидкости в направлении, перпендикулярном основному направлению движения – поток турбулизируется.

Как отмечается в работе [9], свойство устойчивости представляет собой характеристику движения жидкости в целом, и поэтому это свойство определяется числом Рейнольдса.

Граница устойчивости ламинарного движения характеризуется некоторым значением числа Рейнольдса, которое называется критическим $\text{Re}_{кр}$, когда ламинарный режим переходит в турбулентный. Для сферы оно имеет порядок Re ~ 10^3.

Критерий Re = 3 указывает на то, что начало формирования неустойчивости в движении потока около сферы происходит именно при этом числе. Экспериментальные и теоретические исследования показывают [9], что изменение коэффициента сопротивления при вынужденной конвекции $C_{f\text{в}-\text{к}}$ до Re = 3 носит линейный характер, но начиная с Re > 3 и далее происходит заметно плавное изменение характера этого графика, и при числах Re, близких к Re ~ 10^3, наступает кризис режима течения и он становится турбулентным, практически автомодельным, т. е. не зависящим от Re.

Таким образом, Re = 3 определяет границу устойчивости. До Re = 3 преобладает влияние сил трения и все возникающие колебания гасятся, т. е. течение устойчиво. При Re > 3 и выше начинает формироваться неустойчивость, в этом случае силы инерции начинают преобладать над силами трения.

Таким образом, критерий Re = Re_* = 3 является как бы безразмерным критерием, мировой константой устойчивости при движении сферических тел в газовой среде на уровне как микрокосмоса, так и макрокосмоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burago, S. G. Gravity, dark matter and dark energy balance. The General Science Journal. Astrophysics. 2014. April. P. 20.
2. Физическая энциклопедия. Т. 2. Добротность-магнитооптика / под общ. ред. А. А. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1990. – 703 с.
3. Физическая энциклопедия. Т. 1. Ааронова-Бома эффект – Длинные линии / под общ. ред. А. А. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 704 с.
4. Колыхалов, Г. А. Сопротивление сферы при смешанной конвекции в области чисел $Re < 1$ и $Gr < 1$ / Г. А. Колыхалов, Д. Г. Колыхалов // Вестник Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. Вып. 2. Сб. 1. Прогрессивные технологии в машиностроении: сб. науч. тр. – Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т, 2000. – Ч. 3.
5. Колыхалов, Г. А. Теплообмен и трение нагретой сферы в условиях свободной конвекции / Г. А. Колыхалов, Л. И. Кудряшёв // Самолётостроение и авиационная техника: межвузовский сборник научных трудов. – Хабаровск, 1976. – С. 49-55.
6. Колыхалов, Г. А. Экспериментальное исследование естественно-конвективного трения около сферы / Г. А. Колыхалов, В. Т. Череповский // Самолётостроение и авиационная техника: межвузовский сборник научных трудов. – Хабаровск, 1977. – С. 59-62.
7. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер; пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
8. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 823 с.
9. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1967. – 428 с.
10. Джанколи, Д. Физика. В 2 т. Т. 2. / Д. Джанколи; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 607 с.