Ким К. К., Иванов С. Н.
K. K. Kim, S. N. Ivanov

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРЫ СВЕРХПРОВОДНИКОВОЙ ОБМОТКИ

TEMPERATURE CALCULATION OF SUPERCONDUCTING WINDING

Ким Константин Константинович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электротехника и теплоэнергетика» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I (Россия, Санкт-Петербург); Россия, 190031, Московский пр., дом 9; тел. 8(903)096-57-70. E-mail: kimkk@inbox.ru.
Konstantin K. Kim – Dr. Sc., Professor, Head of Electrical Engineering and Thermal Power Engineering Department, Sankt-Petersburg State Transport University (Russia, Sankt-Petersburg); house 9, Moskovsky Av. Sankt-Petersburg, Russia. E-mail: kimkk@inbox.ru.

Иванов Сергей Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры «Электромеханика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: snivanov57@mail.ru.
Sergey N. Ivanov – Dr. Sc., Professor, Electromechanics Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: snivanov57@mail.ru.

Аннотация. В статье приводится аналитическое решение тепловой задачи по определению «горячих» точек сверхпроводниковой обмотки, т. е. областей, где переход её в нормальное (резистивное) состояние наиболее вероятен. Предполагается, что источники тепловыделений расположены на поверхности обмотки и изменяются произвольным образом. Рассматриваются обмотки определённой конфигурации: длинные соленоиды с небольшой толщиной стенок, тонкие однослойные плоские обмотки галетного типа.

Summary. The article provides an analytical solution to the thermal problem of determining the «hot» points of the superconducting winding, i. e. the areas where its transition to a normal (resistive) state is most likely. It is assumed that the heat sources are located on the surface of the winding and change in an arbitrary way. Windings of a certain configuration are considered: long solenoids with a small wall thickness, thin single-layer flat windings of the biscuit type.

Ключевые слова: температура, сверхпроводниковая обмотка, потери, источник теплоты постоянной мощности.

Key words: temperature, superconducting winding, losses, constant power heat source.

УДК 537.312.62

Введение. Зачастую возникает необходимость в определении наиболее нагретых точек сверхпроводниковой обмотки как в переходном, так и стационарном режимах, т. е. областей, чей переход из сверхпроводящего состояния в нормальное (резистивное) наиболее вероятен. Аналитическое решение этой задачи с внутренними источниками теплоты в двухмерной, а тем более в трёхмерной постановке характеризуется значительными трудностями. Однако при относительно простой конструкции обмоток, в частности в случае длинных соленоидов с небольшой толщиной стенок или тонких (однослойных) плоских обмоток галетного типа, задача расчёта температуры может быть сведена к однородной и допускает аналитическое решение.

Постановка задачи исследования. Рассмотрим эквивалентную тепловую схему тонкой обмотки, намотанной на каркас. Собственно обмотка (толщиной a) и её изоляция (толщиной δ) имеют коэффициенты теплопроводности λ_1 и λ_2 соответственно.

Предполагается, что отвод тепловой энергии происходит с внешней поверхности обмотки через слой изоляции, h – коэффициент теплоотдачи с поверхности обмотки. Далее были сделаны следующие допущения:

1. каркас, на котором располагается обмотка, имеет крайне низкую теплопроводность по сравнению с теплопроводностью обмотки;

2. теплопроводность сверхпроводника на несколько порядков больше теплопроводности всех прочих материалов, используемых при изготовлении обмотки;

3. внешняя поверхность изоляции имеет температуру T_0.

Решение задачи определения температуры. Для источника теплоты постоянной мощности (q) и для принятой эквивалентной тепловой схемы температура обмотки может быть найдена из системы

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{d^2T_1}{dx^2} + q = 0 \\ \lambda_2 \dfrac{d^2T_2}{dx^2} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

при граничных следующих условиях:

$$T_1(a) = T_2(a)\,; \qquad \frac{dT_1(0)}{dx} = 0\,; \quad \frac{\lambda_1 dT_1(a)}{dx} = \frac{\lambda_2 dT_2(a)}{dx}.$$

Если обозначить $a + \delta = b$, тогда решение системы уравнений (1) при принятых граничных условиях имеет вид

$$T_1 = -\frac{qx^2}{2\lambda_1} + \frac{qa^2}{2\lambda_1} - \frac{qa^2}{\lambda_2} + q\frac{ab}{\lambda_2} + \frac{qa}{h}\,;$$

$$T_2 = -\frac{qax}{\lambda_2} + \frac{qa}{h} + \frac{qab}{\lambda_2} + T_0\,.$$

Уравнение теплопроводности для принятой эквивалентной тепловой схемы при наличии источника теплоты, изменяющейся во времени, можно записать следующим образом:

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(t) = C\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2}$$

где C – теплоёмкость обмотки.

Учитывая принятое выше допущение о незначительной толщине обмотки по сравнению с другими её размерами, уравнение (2) можно заменить уравнением

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3}$$

с начальными и граничными условиями

$$T(x,0) = T_0\,; \quad T(b,t) = T_0; \qquad \frac{\partial T(b,t)}{\partial x} = -\frac{hq(t)}{\lambda CV},$$

где V – объём обмотки.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\upsilon = \frac{T - T_0}{T_0}; \qquad \bar{x} = \frac{x}{b}; \quad \alpha = \frac{b^2 c}{P\lambda}; \qquad \tau = \frac{t}{P}; \qquad Q(t) = \frac{q(t)hb}{\lambda C T_0 V},$$

где P – период изменения тепловой мощности.

Уравнение (3) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \bar{x}^2} = \alpha \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau} \tag{4}$$

при начальных и граничных условиях

$$\begin{cases} \upsilon(\bar{x}, 0) = 0 \\ \upsilon(1, \tau) = 0 \\ \dfrac{\partial \upsilon(1, \tau)}{\partial \bar{x}} = Q(t) \end{cases}.$$

Суммарные потери в обмотке, которые теперь входят в граничные условия, можно разложить в ряд Фурье и представить в виде

$$Q(t) = \left[\frac{Q_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (Q_{1k} \cos 2\pi k\tau + Q_{2k} \sin 2\pi k\tau\right].$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (4), в результате получим

$$\frac{d^2 Q}{d\bar{x}^2} = \alpha p \theta. \tag{5}$$

Из [1] известно решение уравнения (5):

$$\theta = \left[\frac{Q_0}{2P\sqrt{\alpha p}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{pQ_{1k} + 2\pi k Q_{2k}}{P^2 + (2\pi k)^2}\right] \left(\frac{sh\left(\sqrt{\alpha p}(1 - \bar{x})\right)}{ch\sqrt{\alpha p}}\right).$$

После выполнения преобразования Лапласа и не сложных, но трудоёмких вычислений получаем искомое распределение температуры:

$$\upsilon = \frac{Q_0(1 - \bar{x})}{2} + 2\,Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin[\mu_n(1 - \bar{x})]}{\mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{\alpha}} +$$

$$+ \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left[-\frac{\mu_n^2}{\alpha} Q_{1k} + 2\pi k Q_{2k}\right] \sin[\mu_n(1 - \bar{x})]}{\left[\left(\frac{\mu n^2}{\alpha}\right)^2 + (2\pi k)^2\right]} e^{-\frac{\mu_n^2 \tau}{\alpha}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi k}(\cos 2\sqrt{\alpha\pi k} + ch 2\sqrt{\alpha\pi k}} \{Q_{1k}\,[(\cos 2\pi k\tau - 3\sin 2\pi k\tau A(x) +$$

$$+ (\cos 2\pi k\tau + \sin 2\pi k\tau) B(x\,)] +$$

$$+ Q_{2k}[(\cos 2\pi k\tau - \sin 2\pi k\tau) A(x) - (\cos 2\pi k\tau + \sin 2\pi k\tau) B(x)\},$$

где

$$A(x) = x \cdot \left[ch\sqrt{\pi\alpha k} \sin\sqrt{\pi\alpha k}(2 - x) - ch\sqrt{\pi\alpha k}(2 - x) \sin\sqrt{\pi\alpha k}\right],$$

$$B(x) = x \cdot sh\sqrt{\pi\alpha k}(2 - x) \cos\sqrt{\pi\alpha k} - sh\sqrt{\pi\alpha k} \cos\sqrt{\pi\alpha k}(2 - x),$$

$$\mu_n = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Изменение температуры обмотки в установившемся периодическом режиме получим, положив $\bar{x} = 0$ при $\tau \to \infty$:

$$\upsilon = \frac{Q_0}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi k}(\cos 2\sqrt{\alpha\pi k} + ch 2\sqrt{\alpha\pi k})} \times$$

$$\times\left[(\cos 2\pi k\tau-\sin 2\pi k\tau)\sin 2\sqrt{\alpha\pi k}(Q_{1k}+Q_{2k})+\right.$$
$$\left.+(\cos 2\pi k\tau+\sin 2\pi k\tau)\ sh2\sqrt{\alpha\pi k}(Q_{1k}-Q_{2k})\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абраманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Абраманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Ким, К. К. Системы электродвижения с использованием магнитного подвеса и сверхпроводимости: моногр. / К. К. Ким. – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2007. – 360 с.
3. Ким, К. К. Использование сверхпроводящего подвеса в транспортных системах / К. К. Ким // Электротехника. – 2000. – № 6. – С. 16-19.
4. Уилсон, М. Сверхпроводящие магниты / М. Уилсон. – М.: Мир, 1985. – 408 с.
5. Шубин, М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. – М.: Добросвет, 2003. – 299 с.
6. Андрианов, И. К. Построение обобщённого критерия оптимизации конкурирующих параметров тепловой защиты оболочечных элементов в условиях теплового и силового нагружения / И. К. Андрианов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2021. – № I-1 (49). – С. 4-9.
7. Дмитриева, Т. Л. Разработка и тестирование численных алгоритмов решения условно экстремальных задач / Т. Л. Дмитриева, Х. Уламбаяр // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № I-1 (41). – С. 59-72.