Андрианов И. К., Чепурнова Е. К.
I. K. Andrianov, E. K. Chepurnova

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР В ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ИЗЛИШКА ПРОИЗВОДИТЕЛЯ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ КРИВЫХ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

CONVERGENCE OF ITERATIVE PROCEDURES IN THE PROBLEM OF MAXIMIZING PRODUCER SURPLUS FOR EXPONENTIAL SUPPLY AND DEMAND CURVES

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – PhD in Engineering, Assistant Professor, Aircraft Engineering Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Чепурнова Елена Константиновна – лаборант-исследователь Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: el.chep@bk.ru.
Elena K. Chepurnova – Research Laboratory Assistant, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: el.chep@bk.ru.

Аннотация. Исследование посвящено численному решению оптимизационной задачи об излишке производителя в условиях нелинейных кривых спроса и предложения. Проведена оценка сходимости итерационной процедуры для поиска оптимального объёма продукции для экспоненциальных кривых спроса и предложения. Получены условия, при которых рассмотренная итерационная процедура в зависимости от коэффициентов эластичности по цене, функций спроса и предложения будет обеспечивать сходящийся итерационный процесс. Проанализирована скорость сходимости итерационного процесса в сравнении с итерационной процедурой по методу Ньютона.

Summary. The study is devoted to the numerical solution of the optimization problem for the producer surplus in the conditions of nonlinear supply and demand curves. The convergence of the iterative procedure for finding the optimal volume of products for exponential supply and demand curves is evaluated. The conditions are obtained under which the considered iterative procedure, depending on the elasticity coefficients of supply and demand, as well as on the supply and demand functions, will provide a convergent iterative process. The convergence rate of the iterative process is analyzed in comparison with the iterative procedure according to the Newton method.

Ключевые слова: итерационный процесс, сходимость, сжимающее отображение, излишек производителя, задача максимизации, метод последовательных приближений.

Key words: iterative process, convergence, compressive mapping, producer surplus, maximization problem, sequential approximation method.

УДК 519.6:332.053.22

Введение. Математическое моделирование в задачах оптимизации экономических систем и процессов всё чаще требует применения численных методов, что обусловлено нелинейностью определяющих соотношений при описании реальных процессов. Отметим, что различные подходы к решению оптимизационных задач с нелинейностями рассмотрены в работах [1–5], проблемы многокритериальной оптимизации и оптимального управления исследовались в трудах [6–12]. На сегодняшний день одной из актуальных задач представляется задача о максимизации излишка производителя в условиях монополии для нелинейных кривых спроса и предложения. Постановка задачи оптимизации излишка производителя была описана в работе [13]:

$$PS = \int_0^{q_*} \left(p_* - p_S(q)\right) dq \to \max_{p_*}, \qquad (1)$$

где $p = p_D(q)$ – обратная кривая спроса, $p > 0$ – цена на продукцию, $p = p_S(q)$ – обратная кривая предложения; $q > 0$ – объём продукции, p_*, q_* – соответственно значения цены и объёма продукции в результате создания искусственного дефицита продукции.

Сложность решения задачи (1) обусловлена тем, что для нелинейных кривых спроса и предложения расчёт оптимальной цены или оптимального объёма продаж, доставляющих максимум целевой функции, излишки производителя, может не иметь аналитического решения. Соответственно, требуется применение численных методов для решения оптимизационной задачи (1). Однако выбор итерационной процедуры для численного расчёта требует оценки сходимости решения, поскольку неудачный выбор итерационной схемы может привести к расходящемуся итерационному процессу.

Вопрос сходимости итерационных процедур занимает одно из важных мест при численном решении нелинейных уравнений и систем и требует применения принципа сжимающих отображений [14].

Таким образом, цель данного исследования заключалась в оценке сходимости итерационных процедур при решении задачи максимизации излишка производителя (1) для экспоненциальных кривых спроса и предложения. В рамках задач исследования требовалось получить условия сходимости выбранной итерационной процедуры, а также сравнить её сходимость со сходимостью итерационной схемы согласно методу Ньютона на примере численного эксперимента при различных значениях коэффициентов эластичности спроса и предложения по цене.

Методика исследования. Исследование будем проводить при следующих допущениях: кривая спроса – заданная убывающая функция, кривая предложения – заданная возрастающая функция, сдвиги кривых спроса и предложения исключаются.

В качестве нелинейных обратных кривых спроса и предложения будем рассматривать экспоненциальные зависимости:

$$p_D(q) = \exp(\alpha_D q + \beta_D), \qquad p_S(q) = \exp(\alpha_S q + \beta_S), \qquad (2)$$

где $\alpha_D < 0,\ \beta_D,\ \alpha_S > 0,\ \beta_S$ – коэффициенты обратных функций спроса и предложения.

Тогда с учётом (1), (2) задача максимизации излишка производителя (1) примет вид

$$PS(q_*) = q_* \exp(\alpha_D q_* + \beta_D) - \int_0^{q_*} \exp(\alpha_S q + \beta_S)\, dq \to \max_{q_*}. \qquad (3)$$

Применяя к соотношению (3) необходимое условие экстремума $\partial PS(q_*)/\partial q_* = 0$ [14], перейдём к нелинейному уравнению:

$$q_* + \frac{1}{\alpha_D}\left(1 - \exp[(\alpha_S - \alpha_D)q_* + \beta_S - \beta_D]\right) = 0. \qquad (4)$$

Поскольку уравнение (4) не имеет аналитического решения, рассмотрим применение для его решения численного метода с помощью итерационной процедуры вида

$$q_*^{(k+1)} = \varphi\left(q_*^{(k)}\right), \qquad (5)$$

где k – номер итерации, $\varphi(q)$ – отображение вида

$$\varphi(q) = \frac{1}{\alpha_D}\left(1 - \exp[(\alpha_S - \alpha_D)q + \beta_S - \beta_D] - 1\right). \qquad (6)$$

Исследуем сходимость итерационного процесса (5), (6) с помощью достаточного условия сходимости [14]:

$$|\varphi'(q)| < 1. \tag{7}$$

На основании соотношений (6) и (7) условие сходимости итерационной процедуры (5), (6) примет вид

$$q < \frac{1}{\alpha_S - \alpha_D}\ln\left(\frac{\alpha_D}{\alpha_D - \alpha_S}\right) - \frac{\beta_S - \beta_D}{\alpha_S - \alpha_D}. \tag{8}$$

Представим соотношение (8) через условие рыночного равновесия $p_D(q_e) = p_S(q_e)$, где q_e – объём продаж, соответствующий рыночному равновесию:

$$q_e = \frac{\beta_S - \beta_D}{\alpha_D - \alpha_S}. \tag{9}$$

С учётом (9) неравенство (8) примет вид

$$q < q_e - \frac{1}{\alpha_S - \alpha_D}\ln\left(1 - \frac{\alpha_S}{\alpha_D}\right), \tag{10}$$

при этом правую границу интервала (10) обозначим как $q_{cr} = q_e - \left(\ln\left(1 - \frac{\alpha_S}{\alpha_D}\right)\right)/(\alpha_S - \alpha_D)$.

Таким образом, условие (10) позволяет определить область для поиска оптимального значения q_*, при котором будет обеспечиваться достаточное условие сходимости итерационной процедуры (5), (6).

Введём в рассмотрение коэффициенты эластичности спроса E_p^D и предложения E_p^S по цене [13]:

$$E_p^D(q) = \left|\left(\frac{\partial p_D}{\partial q}\right)^{-1}\right|\frac{p_D(q)}{q}, \qquad E_p^S(q) = \left(\frac{\partial p_S}{\partial q}\right)^{-1}\frac{p_S(q)}{q}. \tag{11}$$

Для экспоненциальных кривых спроса и предложения (2) коэффициенты эластичности по цене (11) примут вид

$$E_p^D(q) = \frac{1}{|\alpha_D|q}, \qquad E_p^S(q) = \frac{1}{\alpha_s q}, \tag{12}$$

тогда перепишем условие (10) с использованием коэффициентов эластичности (12):

$$q < q_e\frac{E_p^D + E_p^S}{E_p^D + E_p^S + E_p^D E_p^S \ln\left(1 - \bar{E}_p\right)}, \tag{13}$$

где $\bar{E}_p = E_p^D / E_p^S$ – относительный коэффициент эластичности по цене.

Также, учитывая (2), (12), можем представить условие сходимости итерационной процедуры (5), (6), выразив через функции спроса, предложения и коэффициентов эластичности по цене в виде

$$\frac{p_D}{p_S} - \frac{E_p^D}{E_p^S} > 1. \tag{14}$$

Условие сходимости (14) итерационной процедуры (5), (6) позволяет прийти к следующим заключениям:

– если коэффициенты эластичности спроса и предложения по цене одинаковы, т. е. $\bar{E}_p = 1$, то для выполнения условия (14) достаточно, чтобы

$$\frac{p_D}{p_S} > 2;$$

– учитывая, что $p_D > p_S$ при $0 < q_* < q_e$, условие (14) выполняется всегда в случаях $E_p^S = \infty$, т. е. при абсолютно эластичном предложении; $E_p^D = 0$, т. е. при абсолютном неэластичном спросе.

Таким образом, неравенства (10), (13), (14) представляют собой эквивалентные формулировки достаточного условия сходимости итерационной процедуры (5), (6).

Поскольку при решении задачи максимизаци (3) оптимальное значение q_* может попасть в область, для которой не выполняются условия (10), (13), (14), рассмотрим применение метода Ньютона [14] с целью решения нелинейного уравнения (4) согласно следующей итерационной процедуре:

$$q_*^{(k+1)} = \psi\left(q_*^{(k)}\right), \tag{15}$$

где

$$\psi(q) = q - \frac{q\alpha_D - \exp[(\alpha_S - \alpha_D)q + \beta_S - \beta_D] + 1}{\alpha_D + (\alpha_D - \alpha_S)(\exp[(\alpha_S - \alpha_D)q + \beta_S - \beta_D])}. \tag{16}$$

Отметим, что метод Ньютона, согласно [14], имеет достаточно хорошую сходимость итерационного процесса, если начальное приближение выбрано вблизи искомого решения нелинейного уравнения. Поэтому в качестве начального приближения для обеих итерационных процедур будем использовать объём продаж, соответствующий рыночному равновесию: $q_*^{(0)} = q_e$.

Условие окончания обоих итерационных процессов представим в виде

$$\left|q_*^{(k+1)} - q_*^{(k)}\right| / q_*^{(k)} \leq \Delta,$$

где Δ – заданная точность расчёта.

Также отметим, что после найденного решения $q_*^{(n)}$ уравнения (4) на n-й итерации с помощью итерационных процедур (5), (6) или (15), (16) необходимо проверить достаточное условие максимума: $|\partial^2 PS(q_*)/\partial(q_*)^2|_{q_*=q_*^{(n)}} < 0$ [14].

Результаты исследования. Расмотрим сходимость итерационных процедур (5), (6) и (15), (16) для различных значений относительного коэффициента эластичности по цене $\bar{E}_p$ при следующих входных данных: $\alpha_D = -0.05$, $\beta_D = 5$, $\beta_S = 1$, $\Delta = 0.01$, коэффициент α_S определяется через $\bar{E}_p$ согласно равенству: $\alpha_S = |\alpha_D|\bar{E}_p$. По результатам серий численных расчётов в математическом пакете MathCad 15.0 на рис. 1 представлено изменение приближений на каждой итерации для процедуры (5), (6) при различных значениях относительного коэффициента эластичности по цене. На рис. 2 – 4 получены области сходимости итерационной процедуры (5), (6) для различных значений относительных коэффициентов эластичости по цене. На рис. 5 изображена оценка сжимаемости отображения $\psi: q^{(k)} \to q^{(k+1)}$ для итерационной процедуры (15), (16) на основании метода Ньютона с помощью условия: $|\psi'(q)| < 1$.

Обсуждение результатов исследования. Согласно результатам применения итерационной процедуры (5), (6) сходимость процесса достигается при $\bar{E}_p \leq 1$, однако при увеличении относительного коэффициента эластичности по цене количество требуемых итераций для сходимости процесса увеличивается (см. рис. 1). При $\bar{E}_p > 2.5$ (см. рис. 1, *e*) сходимость приближений не достигается. Итерационный процесс (5), (6) расходится, поскольку оптимальное значение объёма продаж не удовлетворяет условиям (10), (13), (14).

На рис. 2 области сходимости итерационной процедуры (5), (6) при одинаковых коэффициентах эластичности спроса и предложения по цене находятся между кривыми 1 и 2, кривыми 3 и 4, левее прямой 5. Граничное значение q_{cr} интервала, на котором выполняется достаточное условие сходимости (13), определяется абсциссой точки пересечения кривых 3 и 4 (см. рис. 2) или абсциссой точки пересечения кривых 1 и 2 (см. рис. 2) согласно условию (14). Как видно, на рис. 2 проекции областей сходимости итерационной процедуры (5), (6) между кривыми 1 и 2, кривыми 3 и 4 на ось q совпадают и определяются неравенством $q < q_{cr}$, что подтверждает эквивалентность формулировок (10), (13) и (14).

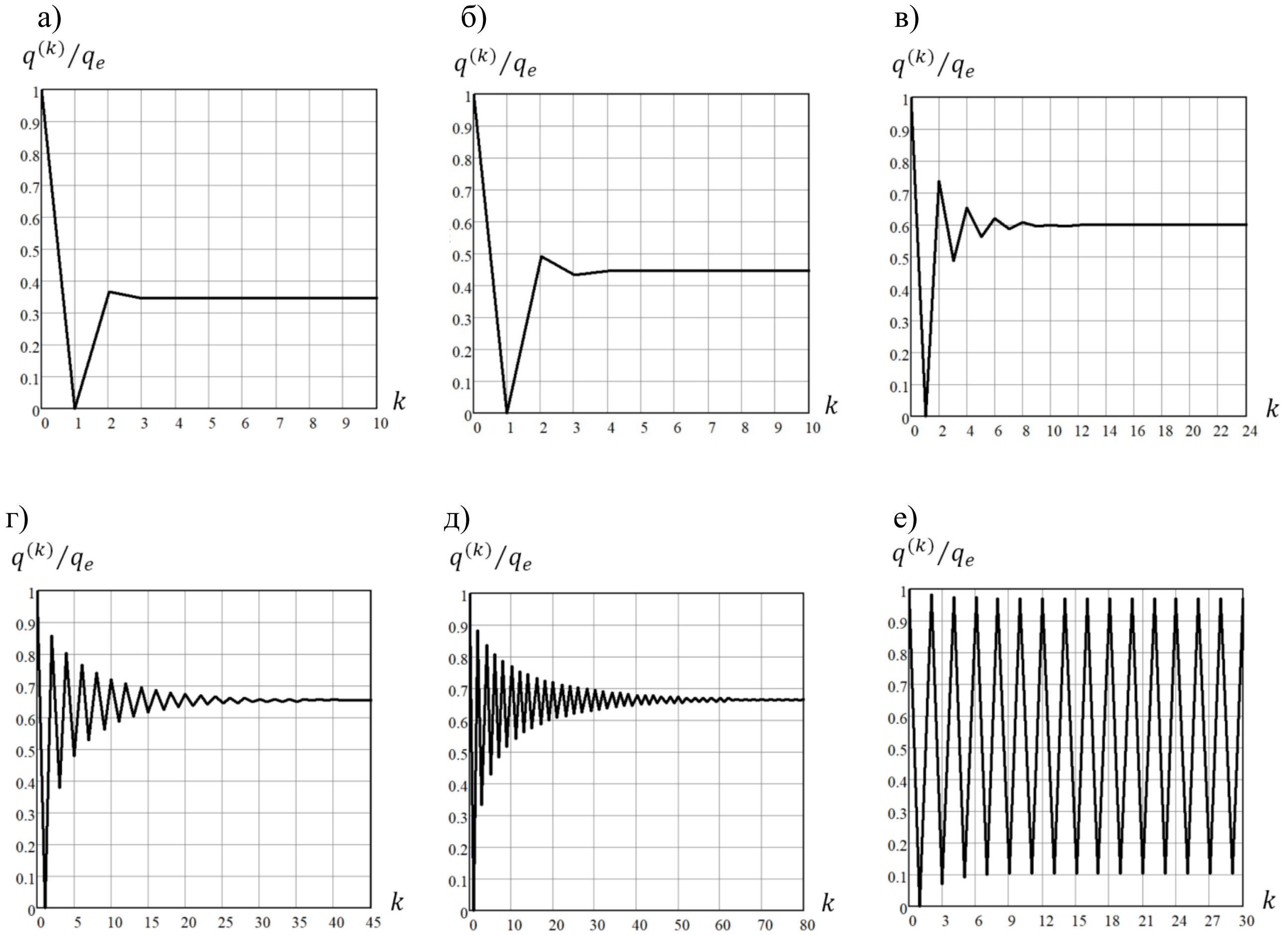


Рис. 1. Сходимость итерационного процесса для схемы (5), (6)
при $\bar{E}_p = 0.5$ (а); $\bar{E}_p = 1$ (б); $\bar{E}_p = 2$ (в); $\bar{E}_p = 2.5$ (г); $\bar{E}_p = 2.6$ (д)

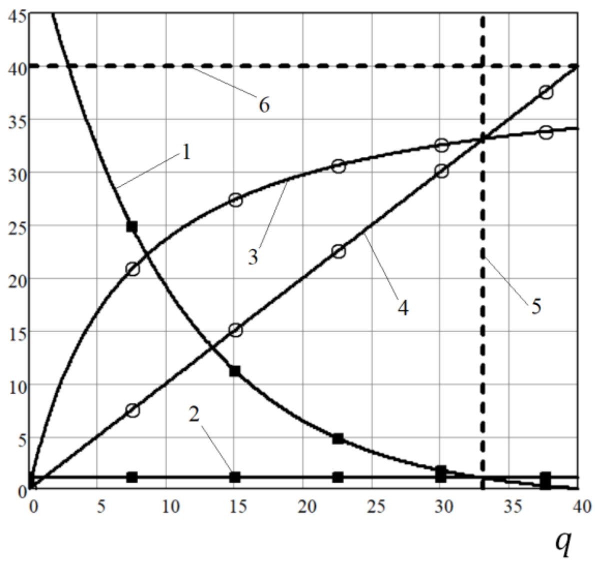


Рис. 2. Графическое представление условия сходимости итерационного процесса (5), (6) с использованием различных эквивалентных формулировок для $\bar{E}_p = 1$: 1 – левая часть неравенства (14) как функция аргумента q; 2 – правая часть неравенства (14); 3 – правая часть неравенства (10) как функция аргумента q; 4 – левая часть неравенства (10) как функция аргумента q; 5 – $q = q_{cr}$; 6 – $q = q_e$

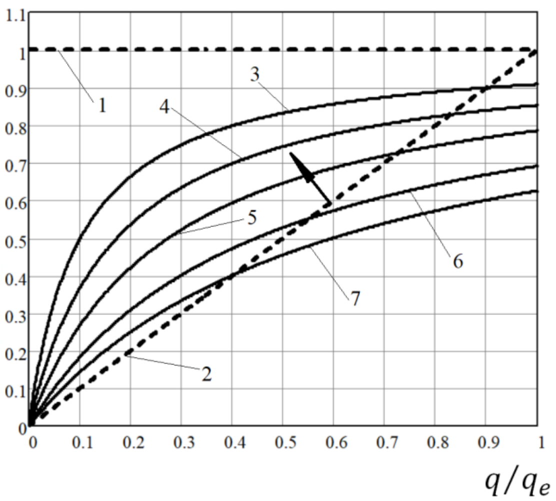


Рис. 3. Графическое представление условия сходимости (13) для итерационного процесса (5), (6): 1 – $q/q_e = 1$; 2 – левая часть неравенства (13), делённая на q_e; 3 – 7 – правые части неравенства (13), деленные на q_e для различных относительных коэффициентов эластичности по цене: 3 – $\bar{E}_p = 0.5$; 4 – $\bar{E}_p = 1$; 5 – $\bar{E}_p = 2$; 6 – $\bar{E}_p = 5$; 7 – $\bar{E}_p = 10$

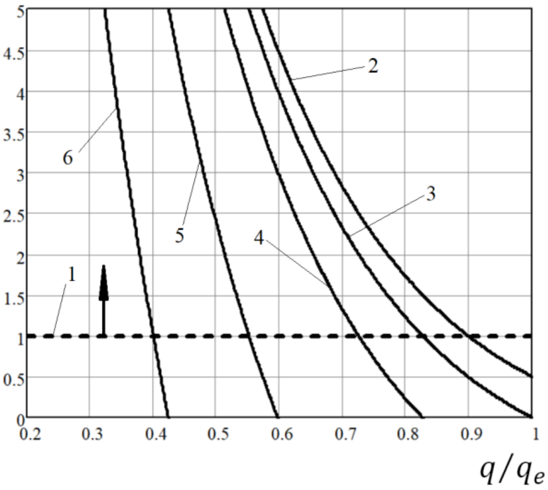
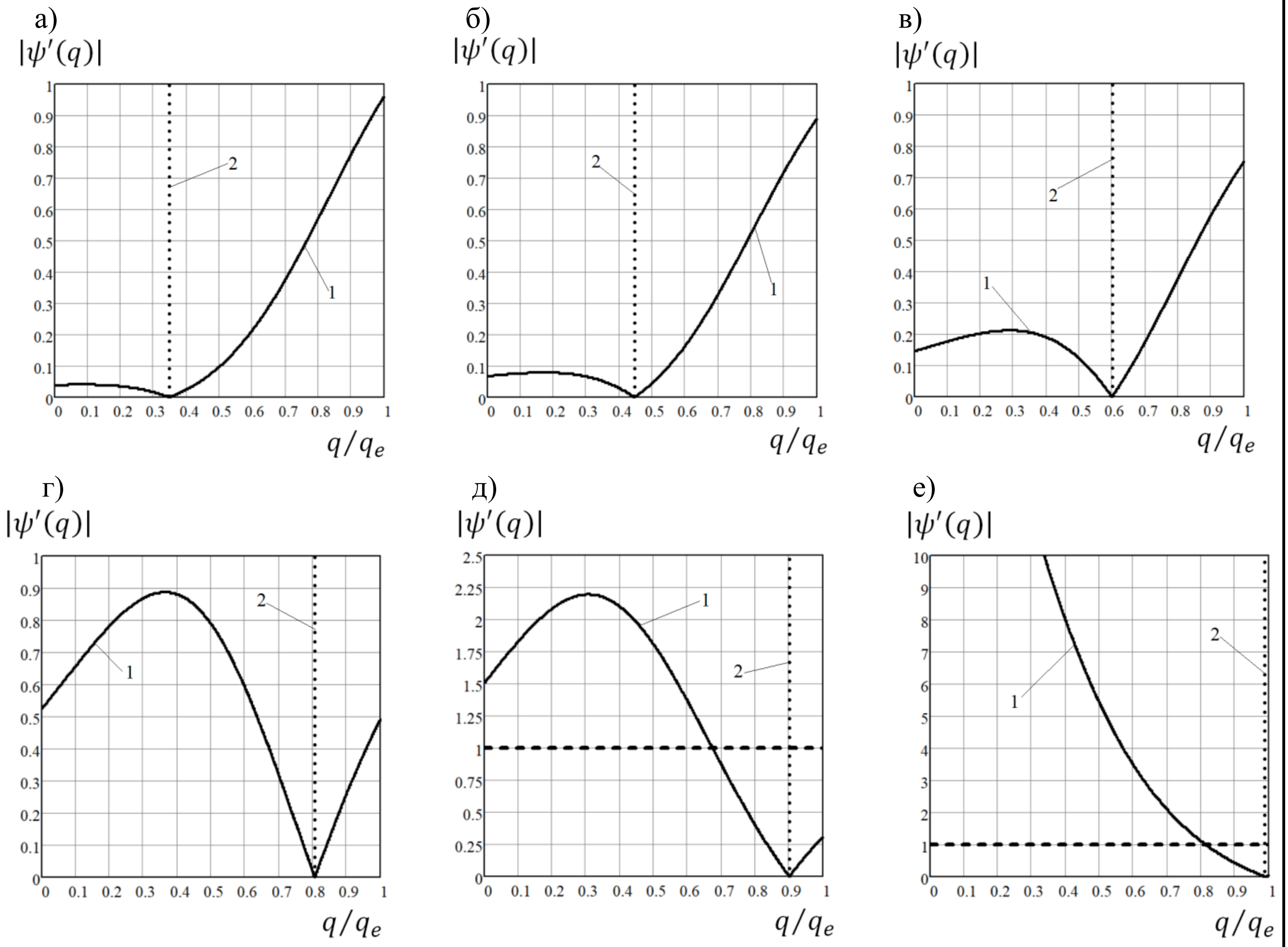


Рис. 4. Графическое представление условия сходимости (14) для итерационного процесса (5), (6): 1 – правая часть неравенства (14); 2 – 6 – левые части неравенства (14) для различных относительных коэффициентов эластичности по цене: 2 – $\bar{E}_p = 0.5$; 3 – $\bar{E}_p = 1$; 4 – $\bar{E}_p = 2$; 5 – $\bar{E}_p = 5$; 6 – $\bar{E}_p = 10$

Оценим изменение области сходимости итерационной процедуры (5), (6) в зависимости от значений относительного коэффициента эластичности по цене $\bar{E}_p$ с помощью формулировок (13) и (14) достаточного условия сходимости (см. рис. 3 и 4). С увеличением относительного коэффициента эластичности по цене правая граница области сходимости итерационного процесса (5), (6) смещается влево (см. рис. 3 и 4), вследствие чего допустимая область для поиска оптимального значения q^* уменьшается, и при больших значениях $\bar{E}_p$ оптимальное q^* может не попасть в область сходимости. Соответственно, требование сжимаемости отображения (6) не будет выполняться, и итерационный процесс будет расходящимся, что графически подтверждается на рис. 1, *е*. При малых значениях относительного коэффициента эластичности $\bar{E}_p$ допустимая область сходимости расширяется, приближаясь к границе q_e, т. е. захватывая область решений $0 < q < q_e$. На практике это выражается в более высокой скорости сходимости итерационного процесса (5), (6), что наглядно изображено на рис. 1, *а-в*.

Согласно рис. 5, *а-в* отображение ψ (16) с помощью метода Ньютона является сжимающим при $\bar{E}_p \leq 1$. Для больших значений $\bar{E}_p > 1$ достаточное условие сходимости $|\psi'(q)| < 1$ для некоторых q не выполняется (см. рис. 5 *д*, *е*). С увеличением относительного коэффициента эластичности по цене область невыполнения достаточного условия сходимости расширяется, смещаясь вправо (см. рис. 5), к $q = q_e$. При этом оптимальное значение q_* приближается к равновесному значению q_e, в окрестности которого условие $|\psi'(q)| < 1$ выполняется, в результате чего для представленных исходных данных оптимальные значения q_* на основании итерационной процедуры (15), (16) достигаются менее чем за 10 итераций.



1 – функция $|\psi'(q)|$, 2 – $q = q^{(n)}$, для различных относительных коэффициентов
Рис. 5. Графическая проверка достаточного условия сходимости
итерационной процедуры (15), (16), эластичности по цене: а – $\bar{E}_p = 0.5$; б – $\bar{E}_p = 1$; в – $\bar{E}_p = 2$;
г – $\bar{E}_p = 5$; д – $\bar{E}_p = 10$; е – $\bar{E}_p = 100$

Заключение. В рамках проведённого исследования получены условия сходимости итерационной процедуры (5), (6) при решении задачи максимизации излишка производителя для нелинейных экспоненциальных кривых спроса и предложения, представлено несколько эквивалентных формулировок достаточного условия сходимости с помощью функций спроса и предложения, коэффициентов эластичности по цене. Проведена оценка сходимости итерационного процесса для задачи максимизации излишка производителя с помощью метода Ньютона. Сравнивая сходимость итерационных процедур (5), (6) и (15), (16) для поиска оптимального значения объёма продукции q_*, отметим, что при малых значениях относительного коэффициента эластичности $\bar{E}_p \leq 1$ оба итерационных процесса показывают хорошую сходимость. Итерационная процедура (5), (6) имеет более простую запись, но для её сходимости требуется большее количество итераций в сравнении с более сложной итерационной процедурой (15), (16) согласно методу Ньютона, но имеющей более высокую скорость сходимости. Для значений относительного коэффициента эластичности $\bar{E}_p > 1$ итерационная процедура (5), (6) может расходиться, в то время как итерационная процедура (15), (16) показывает хорошую сходимость при выборе начального приближения, равного равновесному значению объёма продаж.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепурнова, Е. К. Математическая модель оптимизации прибыли с ограничениями на стоимость и количество продаваемых услуг / Е. К. Чепурнова, И. К. Андрианов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2023. – № 1 (65). – С. 16-24.
2. Chepurnova, E. K. Assessment of the Impact of Costs on the Profit Optimization Model for the Sale of Services / E. K. Chepurnova, I. K. Andrianov // Components of Scientific and Technological Progress. – 2022. – No. 11 (77). – P. 14-18.
3. Andrianov, I. K. Maximizing Profits from Sales of Independent Goods or Services in Conditions of Elastic Demand under Nonlinear Constraints / I. K. Andrianov, E. K. Chepurnova // Components of Scientific and Technological Progress. – 2023. – No. 3 (81). – P. 56-60.
4. Кирик, Е. Е. Подход к решению нелинейных оптимизационных задач блочной структуры со связующими ограничениями / Е. Е. Кирик // Научные вести Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». – 2015. – № 5 (103). – С. 32-38.
5. Попов, А. А. Применение генетических алгоритмов для решения задач оптимизации в экономике / А. А. Попов, А. Ю. Маркова // Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова. – 2011. – № 1 (1). – С. 46-56.
6. Набатова, Д. С. Методы многокритериальной оптимизации для слабоструктурированных проблем в задачах экономики / Д. С. Набатова // Современная математика и концепции инновационного математического образования. – 2018. – Т. 5. – № 1. – С. 366-372.
7. Маркина, М. В. Многокритериальные задачи оптимизации в экономике / М. В. Маркина // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2014. – № 4-1. – С. 416-421.
8. Sukharev, O. S. Optimization and resource distribution management in a national economy: The choice of structure / O. S. Sukharev // Perm University Herald. Economy. – 2020. – Vol. 15, No. 2. – P. 178-197.
9. Губарева, Е. А. Математическая составляющая оптимального управления / Е. А. Губарева, Г. Ю. Паршикова, А. А. Перфильев // Мягкие измерения и вычисления. – 2022. – Т. 53. – № 4. – С. 65-74.
10. Tsatsulin, A. N. An iterative procedure of consumer research in a narrow market segment / A. N. Tsatsulin, A. V. Babkin // St.Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics. – 2015. – No. 5 (228). – P. 108-117.
11. Горбатков, С. А. Метод структурного синтеза нейросети, интегрированный с квазибайесовской регуляризацией нейросетевой динамической модели банкротств / С. А. Горбатков, С. А. Фархиева // Экономика и предпринимательство. – 2020. – № 8 (121). – С. 952-958.
12. Крапухина, Н. В. Методы искусственного интеллекта в задачах оперативного управления и оптимизации сложных технологических комплексов / Н. В. Крапухина, К. М. Пастухова, П. А. Свиридов // Проблемы управления. – 2003. – № 3. – С. 21-24.
13. Филатов, А. Ю. Микроэкономика: учеб. пособие / А. Ю. Филатов. – 1-е изд. – Москва: Изд-во Юрайт, 2023. – 204 с.
14. Кулакова, С. В. Численные методы: учеб. пособие / С. В. Кулакова. – Иваново: Иван. гос. хим.-технол. ун-т, 2018. – 124 с.