Андрианов И. К., Чепурнова Е. К.
I. K. Andrianov, E. K. Chepurnova

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О СУММАРНЫХ ИЗДЕРЖКАХ ПРОИЗВОДСТВА И ХРАНЕНИЯ ПРОДУКЦИИ С ПОДВИЖНОЙ ПРАВОЙ ГРАНИЦЕЙ

VARIATION PROBLEM OF PRODUCTION AND STORAGE TOTAL COSTS OF PRODUCTS WITH A MOVABLE RIGHT BOUNDARY

Андрианов Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.
Ivan K. Andrianov – PhD in Engineering, Assistant Professor, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: ivan_andrianov_90@mail.ru.

Чепурнова Елена Константиновна – лаборант-исследователь Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: el.chep@bk.ru.
Elena K. Chepurnova – Laboratory Assistant-Researcher, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: el.chep@bk.ru.

Аннотация. Исследование посвящено проблеме математического описания оптимальной динамики производства. Рассмотрена математическая модель плана производства продукции с целью минимизации издержек производства и хранения. На основании метода вариационного исчисления предложено решение научной задачи о суммарных издержках производства и хранении продукции с подвижной правой границей, т. е. при неизвестном плане производства в конце расчётного периода. Получены условия, накладываемые на функцию производственных издержек, при которых вариационная задача может иметь оптимальное решение. Для исключения проблемы отрицательности начального запаса продукции при поиске оптимального решения вариационной задачи разработана численная методика расчёта на основании метода Ньютона-Рафсона и проведены серии математических экспериментов на примере квадратичной функции производственных издержек и синусоидальной функции потребностей в продукции.

Summary. The research is devoted to the problem of mathematical description of optimal production dynamics. A mathematical model of the production plan is considered in order to minimize production and storage costs. Based on the method of calculus of variations, a solution is proposed to the problem of the total costs of production and storage of products with a movable right boundary, i.e. with an unknown production plan at the end of the billing period. The conditions imposed on the production cost function are obtained, under which the variation problem can have an optimal solution. To solve the problem of the negativity of the initial stock of products in the search for an optimal solution to the variation problem, a numerical calculation method based on the Newton-Raphson method was developed and a series of mathematical experiments were conducted using the example of the quadratic function of production costs and the sinusoidal function of product needs.

Ключевые слова: вариационная задача, динамическое программирование, экономическая динамика, оптимальный план производства, издержки производства и хранения.

Key words: variation problem, dynamic programming, economic dynamics, optimal production plan, production and storage costs.

УДК 657.471.1:517.97

Введение. Современное развитие производственно-экономической деятельности предприятий неразрывно связано с решением научных задач динамического программирования. Одним из важных вопросов сегодня является проблема математического моделирования объёма выпуска продукции для покрытия изменяющихся во времени потребностей. Научная проблема заключается в том, чтобы выбрать такой план выпуска продукции, при котором издержки производства и хранения продукции были бы минимальны, но при этом покрывались потребности в продукции и сохранялся определённый её запас.

Актуальность исследования обусловлена тем, что в условиях нестабильной экономики приоритетными направлениями являются разработка оптимизационных методов экономико-математического моделирования и применение их для решения практических проблем. Наибольший интерес сегодня представляют задачи экономической динамики, поскольку в ряде таких задач оптимальные показатели зависят не от конкретных значений исследуемых переменных, а от функций. Однако отметим, что, согласно научным исследованиям [1–8], на сегодняшний день большинство подходов в оптимизации динамики производственной деятельности предприятия заключается в разработке оптимальных схем перераспределения ресурсов, обновлении производственных фондов, оценке рисков, прогнозировании деятельности с применением методов теории вероятностей и статистических методов.

В исследовании [9] О. Ланге была предложена постановка задачи динамического программирования объёма выпуска продукции. Автором с целью минимизации суммарных издержек производства и хранения был применён метод вариационного исчисления, суммарные издержки были представлены с помощью функционала вида [9]

$$V[Q(t)] = \int_{t_0}^{t} \left[\varphi[q(t)] + c\big(Q(t) - R(t) + z(t_0)\big)\right] dt, \tag{1}$$

где t – время; $\varphi[q(t)]$ – функция издержек производства; $q(t)$ – объём выпуска продукции в момент времени t; $R(t)$ – общая потребность в производимой продукции с начала периода t_0 к моменту времени t; $Q(t)$ – функция динамики производства, определяемая суммарным объёмом выпуска продукции с начала периода t_0 к моменту времени t; c – удельные издержки хранения; $z(t_0)$ – начальный запас товаров в момент времени t_0.

Для функционала (1) известными считаются функции суммарных производственных издержек и потребностей в продукции:

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi[q(t)] dt, \qquad R(t) = \int_{t_0}^{t} r(t) dt, \tag{2}$$

где $\Phi(t)$ – общие издержки предприятия на производство всего объёма продукции с начала периода t_0 к моменту времени t; $r(t)$ – потребность в производимом продукте в момент t.

Искомой функцией, доставляющей минимум функционалу (1), является функция динамики производства:

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} q(t) dt, \qquad q(t) = Q'(t). \tag{3}$$

В работе [9] оптимизационная задача сводится к определению функции динамики производства во времени при известных значениях суммарного производства в начале $Q(0)$ и конце $Q(T)$ временного периода, т. е. решается вариационная задача с неподвижными границами. Однако на практике суммарный объём производства в конце расчётного периода может быть неизвестен, что требует рассмотрения задачи (1) с подвижной правой границей.

Кроме того, согласно работе [9], постановка задачи (1) – (3) дополняется условием неотрицательности запаса продукции:

$$z(t) = Q(t) - R(t) + z(t_0) \geq 0. \tag{4}$$

Автор в работе [9] отмечает важность вопроса о запасе продукции, но ввиду его второстепенной роли считает начальный запас $z(t)|_{t=t_0} = z(t_0)$ известным. Одна из проблем постановки задачи (1) – (4), о которой говорится в труде [9], связана с тем, что при исчерпании запаса продукции в некоторый момент времени t функция потребностей $r(t)$ может превысить функцию плана производства $q(t)$, тем самым приводя к отрицательному запасу продукции, что на практике невозможно. Автор в работе [9] предлагает решать эту проблему путём пересмотра производственной программы на определённых временных шагах и представления решения в дискретном виде. Следует отметить, что предложенная в работе [9] модель была также описана в труде [10] и дополнена с учётом неопределённости и вероятностного подхода в исследовании [11].

В рамках данной работы объектом исследования являются издержки производства и хранения товаров. Отметим, что производственные издержки складываются из постоянных FC и переменных VC издержек. Под постоянными будем понимать издержки, которые не зависят от объёма выпуска, не меняются в краткосрочном периоде, но могут изменяться в долгосрочном периоде. Под переменными будем понимать издержки, зависящие от объёма выпуска. Таким образом, при рассмотрении задачи минимизации издержек производства и хранения продукции (1) нерешёнными остаются вопрос расчёта оптимальной динамики производства при условии, когда план производства на конец периода заранее неизвестен, а также проблема отрицательности запаса продукции в течение всего временного интервала. На основании описанной проблемы были сформулированы задачи исследования:

– решить задачу минимизации суммарных издержек производства и хранения товаров (1) при условии подвижной правой границы;

– предложить ограничения и методику для расчёта начального запаса продукции с целью выполнения условия неотрицательности запаса продукции;

– определить условия применимости построенной математической модели оптимального плана производства;

– провести численный эксперимент расчёта оптимального плана производства на примере задачи с известными функциями потребностей и издержек.

Решение описанных задач проводилось с использованием следующих методов: метод вариационного исчисления для поиска допустимой экстремали функционала, метод Ньютона – Рафсона для решения уравнения Эйлера – Лагранжа при условии трансверсальности.

Новизна исследования обусловлена тем, что предложена уточнённая постановка задачи оптимальной динамики производства с ограничениями, получены новые результаты решаемой вариационной задачи с подвижной границей на основании построенной численной методики, которые могут найти практическое применение в производственной деятельности.

Методика исследования. Построение модели оптимизации суммарных издержек производства и хранения продукции будем проводить при следующих допущениях:

– функция потребностей в продукции от времени, функция издержек производства от объёма выпуска являются гладкими заданными функциями при $t \in [t_0; T]$;

– удельные издержки хранения не меняются с течением времени.

Согласно уравнениям (1) – (4), проблема отрицательности запаса продукции при решении вариационной задачи возникает вследствие того, что из неравенства $Q(t) - R(t) \geq 0$ не следует неравенство $q(t) - r(t) \geq 0$. Поэтому в рамках данного исследования при рассмотрении задачи (1) предлагается наложить дополнительное ограничение вместо условия (4):

$$q(t) - r(t) + z(t) \geq 0. \tag{5}$$

Докажем, что если выполняется условие (5), то неравенство (4) является верным. Если $q(t) - r(t) \leq 0$, то, подставляя функцию запаса товаров (4) в соотношение (5), получим

$$z(t) = Q(t) - R(t) + z(t_0) \geq -\big(q(t) - r(t)\big) \geq 0,$$

тогда условие (4) выполняется. Если $q(t) - r(t) \geq 0$, то, учитывая (2) и (3), $Q(t) - R(t) \geq 0$, и при $z(t_0) \geq 0$ условия (4) и (5) выполняются.

Таким образом, согласно постановке задачи исследования требуется найти функцию $Q(t)$, на которой функционал (1) при условии (5) достигает минимума при ограничениях:

$$V[Q(t)] = \int_{t_0}^{T} F\big(t, Q(t), Q'(t)\big) dt \to \min, \tag{6}$$

$$Q(t)|_{t=t_0} = 0, \tag{7}$$

$$q(t) - r(t) + Q(t) - R(t) + z(t_0) \geq 0, \tag{8}$$

$$t_0 = t_0^*, \qquad T = T^*,$$

$$z(t)|_{t=t_0} \geq 0, \qquad q(t) \geq 0,$$

где $F\big(t, Q(t), Q'(t)\big)$ – интегрант функционала (6):

$$F\big(t, Q(t), Q'(t)\big) = \varphi[Q'(t)] + c\big(Q(t) - R(t) + z(t_0)\big). \tag{9}$$

Задача (6) является вариационной задачей с подвижной границей, поскольку левый конец кривой $Q(t)$ неподвижен при $t = t_0^*$, а правый конец может скользить по вертикальной прямой $t = T^*$. Рассмотрим необходимые условия экстремума функционала (6) [12]:

– уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial Q'} = 0, \tag{10}$$

– уравнение трансверсальности на правой границе исследуемой области:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial Q'}\right|_{t=T} = 0, \tag{11}$$

– уравнение Якоби:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q'}\right)\right] u - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial {Q'}^2} u'\right) = 0, \tag{12}$$

где $u = u(t)$ – решение уравнения Якоби.

Подставляя соотношение (9) в уравнения (10), (11), перейдём к системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi[q(t)]}{\partial q^2} dq = c dt \\ \left.\frac{\partial \varphi[q(t)]}{\partial q}\right|_{t=T} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (13) и для нахождения константы интегрирования применим условие трансверсальности, тогда систему (13) можно свести к виду

$$\frac{\partial \varphi[q(t)]}{\partial q} = -c(T - t). \tag{14}$$

Анализ соотношения (14) позволяет прийти к следующим заключениям: равенство (14) имеет смысл, если функция $\varphi = \varphi(q)$ является нелинейной; на полуинтервале $t \in [t_0; T)$ уравнение (14) выполняется только при условии

$$\frac{\partial \varphi[q(t)]}{\partial q} < 0. \tag{15}$$

Соответственно, рассмотрим возможные случаи выполнения условия (15) и их практическое обоснование при $t \in [t_0; T)$:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} < 0, \qquad \dfrac{\partial q}{\partial t} > 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} > 0, \qquad \dfrac{\partial q}{\partial t} < 0, \qquad \dfrac{\partial r}{\partial t} < 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} > 0, \qquad \dfrac{\partial q}{\partial t} < 0, \qquad \dfrac{\partial r}{\partial t} > 0, \qquad q(t) + z(t_0) \geq r(t) \end{matrix}\right\}. \tag{16}$$

Для первого случая системы (16) функция производственных издержек монотонно убывает с течением времени, а объём выпуска товаров является возрастающей функцией во времени. На практике данный случай возможен при выполнении двух условий: рассматривается долгосрочный период, в течение которого постоянные издержки постоянно уменьшаются, и убывание постоянных издержек происходит быстрее, чем рост переменных издержек: $FC'(t) < -VC'(t)$, $FC'(t) < 0,\ VC'(t) > 0$.

Для второго и третьего случаев системы (16) функция производственных издержек является возрастающей во времени, а объём выпуска продукции – убывающей функцией во времени, что на практике возможно в долгосрочном периоде, когда постоянные издержки растут быстрее, чем уменьшаются переменные издержки: $FC'(t) > -VC'(t),\ FC'(t) > 0,\ VC'(t) < 0$. Второй случай системы (16) имеет смысл, если потребность в товарах является убывающей функцией, что и обуславливает снижение объёма производства. Третий случай системы (16) имеет смысл, когда начального запаса товаров достаточно для удовлетворения потребностей в товарах при снижающемся объёме выпуска товаров.

Рассмотрим условие (12), уравнение Якоби с учётом (9) сводится к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \varphi[q(t)]}{\partial q^2} u'\right) = 0. \tag{17}$$

Решая уравнение (17) с учётом условия $u(t_0) = 0$, получим

$$u = C_1\left(\int \left(\frac{\partial^2 \varphi[q(t)]}{\partial q^2}\right)^{-1} dt - \left[\int \left(\frac{\partial^2 \varphi[q(t)]}{\partial q^2}\right)^{-1} dt\right]_{t=t_0}\right), \tag{18}$$

где C_1 – константа интегрирования.

Если учесть, что $C_1 \neq 0$ и $\varphi = \varphi(q)$ – нелинейная функция, уравнение (18) нигде в полуинтервале $t_0 < t \leq T$ в ноль не обращается, следовательно, условие Якоби для допустимой экстремали уравнения (14) выполняется.

Решение уравнения (14) $q = q_*(t)$ позволяет перейти к суммарному плану производства, являющегося допустимой экстремалью функционала (6):

$$Q_*(t) = \int_{t_0}^{t} q_*(t) dt. \tag{19}$$

Для того чтобы функция (19) являлась минималью функционала (6), требуется выполнение условия Лежандра [12]:

$$\frac{\partial}{\partial Q'}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q'^2}\right) = \frac{\partial^2 \varphi[q(t)]}{\partial q^2} \geq 0. \tag{20}$$

Таким образом, учитывая условия (14), (15), (20), постановка вариационной задачи (6) – (9) с подвижной правой границей имеет смысл, если функция производственных издержек $\varphi = \varphi(q)$ представляет собой убывающую по нелинейному закону функцию, кривая которой имеет неотрицательную кривизну. Дальнейшее решение уравнения (14) требует задания функции производственных издержек $\varphi = \varphi(q)$.

На втором этапе исследования требовалось определить начальный запас продукции $z(t_0)$ для выполнения условия (8). Представим выражение (8) в виде

$$z(t_0) = z_0 \geq -\xi(t), \tag{21}$$

где $\xi(t) = Q(t) - R(t) + q(t) - r(t)$.

Для удовлетворения условия (21) достаточно выполнения равенства

$$z_0 = -\xi_{\min} \cdot \theta(-\xi_{\min}), \tag{22}$$

где $\xi_{\min} = \min\{\xi(t_0); \xi(t_*); \xi(T)\}, \xi(t_*) = \min\limits_{t \in [t_0;T]} \xi(t)$, $\theta(\varepsilon)$ – функция Хевисайда:

$$\theta(\varepsilon) = \begin{cases} 0, \varepsilon < 0 \\ 1, \varepsilon \geq 0 \end{cases}.$$

Таким образом, для решения оптимизационной задачи

$$\xi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} q(t)dt - \int\limits_{t_0}^{t} r(t)dt + q(t) - r(t) \to \min, \tag{23}$$

необходимое условие экстремума функции (23) примет вид

$$\left.\frac{\partial\xi(t)}{\partial t}\right|_{t=t_*} = 0: q(t_*) - r(t_*) + \frac{\partial q(t_*)}{\partial t} - \frac{\partial r(t_*)}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

Поскольку уравнение (24) может иметь несколько решений, применим процедуру отделения корней [13]. Построим систему узлов на отрезке $[t_0; T]$:

$$i = 0,1, \dots, N^{(k)},$$

$$\Delta t^{(k)} = (T - t_0)/N^{(k)},$$

$$t_i^{(k)} = t_0 + i\Delta t^{(k)},$$

где $\left(N^{(k)} + 1\right)$ – количество узлов сетки; k – номер итерации.

Сетка узлов перестраивается согласно итерационной схеме:

$$\Delta t^{(k+1)} = \Delta t^{(k)}/2\,, \qquad N^{(k+1)} = 2N^{(k)}.$$

Условие окончания итерационного процесса перестроения сетки

$$\frac{\partial^2\xi\left(t_i^{(k+1)}\right)}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2\xi\left(t_i^{(k+1)} + \Delta t^{(k+1)}\right)}{\partial t^2} \geq 0.$$

Затем определяются отрезки $\left[t_{i_*}^{(k+1)}; t_{i_*}^{(k+1)} + \Delta t^{(k+1)}\right]$, на которых может находиться экстремум согласно условию

$$\frac{\partial\xi\left(t_{i_*}^{(k+1)}\right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial\xi\left(t_{i_*}^{(k+1)} + \Delta t^{(k+1)}\right)}{\partial t} \leq 0, \tag{25}$$

где $i_* = 0,1, \dots, m$; $(m + 1)$ – количество узлов сетки, для которых выполняется условие (25).

Для численного решения уравнения (24) начальное приближение примет вид

$$t_{i_*}^{[0]} = t_{i_*}^{(k+1)} + \frac{1}{2}\Delta t^{(k+1)}.$$

Применим метод Ньютона – Рафсона [13] для решения уравнения (24), тогда итерационная схема примет вид

$$t_{i_*}^{[j+1]} = t_{i_*}^{[j]} + \gamma \frac{\partial \xi\left(t_{i_*}^{[j]}\right)}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 \xi\left(t_{i_*}^{[j]}\right)}{\partial t^2}\right]^{-1}, \qquad -1 < \gamma < 0, \tag{26}$$

где j – номер итерации.

Условие окончания итерационного процесса (26)

$$\left(t_{i_*}^{[j+1]} - t_{i_*}^{[j]}\right) / t_{i_*}^{[j+1]} \le \delta, \tag{27}$$

где δ – заданная точность.

Для поиска минимумов функции (23) применим достаточное условие экстремума:

$$\frac{\partial^2 \xi\left(t_{i_{**}}\right)}{\partial t^2} > 0, \qquad t_{i_{**}} = \left\{t_{i_*}^{[n]}\right\}, \tag{28}$$

где i_{**} – узлы сетки, для которых выполняется условие (27); n – номер итерации, для которой выполняется условие (27).

Тогда с учётом (22) примем $\xi(t_*) = \min\left\{\xi\left(t_{i_{**}}\right)\right\}$ при выполнении условия (28). Таким образом, с учётом описанной численной методики (24) – (28) определяется начальный запас продукции (22) для выполнения условия (8).

В качестве примера функции производственных издержек рассмотрим квадратичную функцию, как и в работах [9; 10]:

$$\varphi[q(t)] = \alpha_0 + \alpha_1 q(t) + \alpha_2 q^2(t). \tag{29}$$

Решая уравнение (14) для функции (29), получим оптимальную функцию объёма выпуска продукции:

$$q_*(t) = \frac{c}{2\alpha_2} t - \frac{cT + \alpha_1}{2\alpha_2}. \tag{30}$$

Согласно условию Лежандра (20), $\alpha_2 \ge 0$. Учитывая, что $q(t) \ge 0$, $\varphi[q(t)] \ge 0$, получим условия для постоянных коэффициентов уравнения (29): $\alpha_1 \le -cT$, $\alpha_0 \ge \alpha_1^2/4\alpha_2$. Таким образом, условия для коэффициентов полинома (29) отличаются от условий в работах [9; 10] для вариационной задачи с неподвижными границами. Интегрируя соотношение (30) с учётом условия (7), получим минималь функционала (6):

$$Q_*(t) = \frac{c}{4\alpha_2}\left(t^2 - t_0^2\right) - \frac{cT + \alpha_1}{2\alpha_2}(t - t_0).$$

Результаты исследования. Применение построенной математической модели расчёта оптимального плана производства рассмотрим в системе Mathcad на примере тестовой задачи. Поиск оптимального плана производства осуществлялся при условиях первого случая системы (16). Численный расчёт проводился для следующих входных данных: $t_0 = 0$, $T = 1$, $c = 1$, $\varphi[q(t)] = 70 - q(t) + 0.005q^2(t)$, $r(t) = 50[1 + \sin(10t - \pi/2)]$. Поскольку интерес представляют не абсолютные значения оптимального плана производства, а его изменение в зависимости от динамики потребностей в продукции, графические результаты (см. рис. 1 – 6) представим с помощью относительных величин, учитывая, что $q_{\max} = r_{\max} = 100$, $\Phi(T) = 35.6$, $z(t_0) = 78.1$, $z(T) = 76.4$, $\varphi[q(t_0)] = 70$, $V[Q(T)]|_{Q(t)=R(t),z(t)=z_0} = 115.3$.

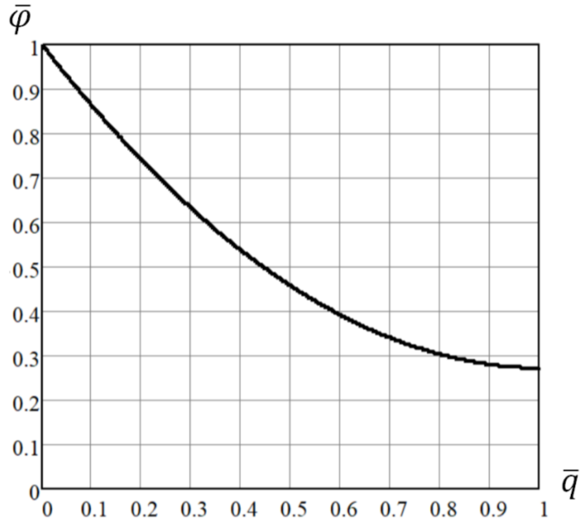

Рис. 1. Зависимость относительных издержек производства продукции $\overline{\varphi} = \varphi[q(t)]/\varphi[q(t_0)]$ от относительного количества товаров $\bar{q} = q(t)/q_{\max}$

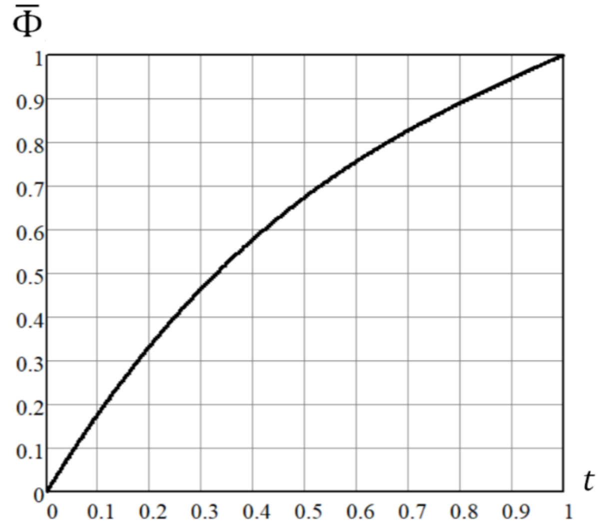

Рис. 2. Изменение относительных суммарных издержек производства продукции $\overline{\Phi} = \Phi(t)/\Phi(T)$ с течением времени

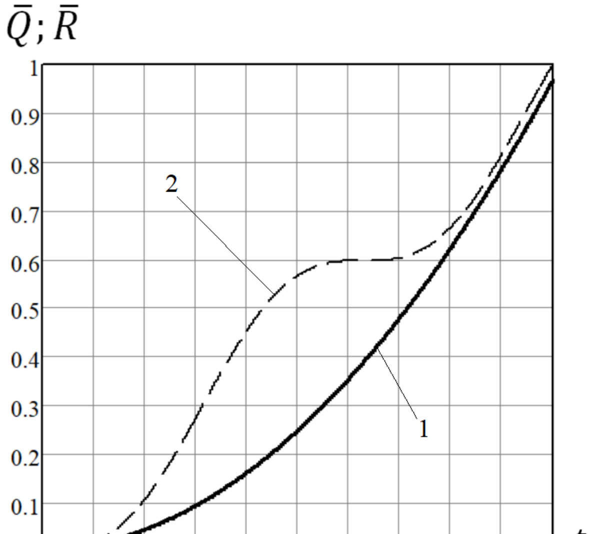

Рис. 3. Изменение относительных величин с течением времени: 1 – оптимального суммарного объёма производства $\bar{Q} = Q_*(t)/R(T)$; 2 – суммарной потребности в товарах $\bar{R} = R(t)/R(T)$

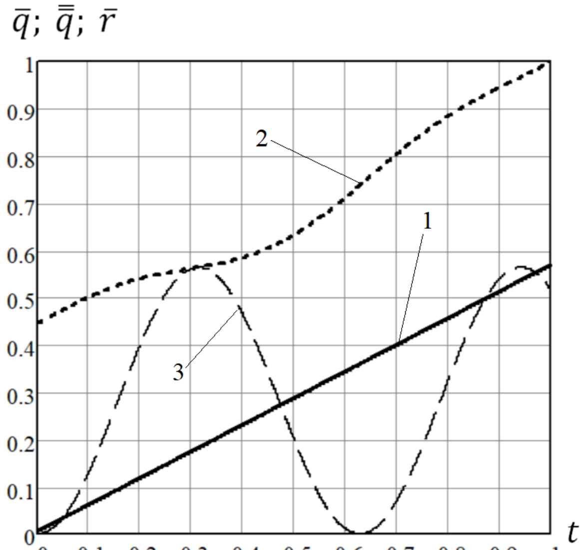

Рис. 4. Изменение относительных величин с течением времени: 1 – оптимального плана производства $\bar{q} = q_*(t)/[q(T) + z(T)]$; 2 – оптимального плана производства с учётом текущего запаса товаров $\bar{\bar{q}} = [q_*(t) + z(t)]/[q(T) + z(T)]$; 3 – потребностей в продукции $\bar{r} = r(t)/[q(T) + z(T)]$

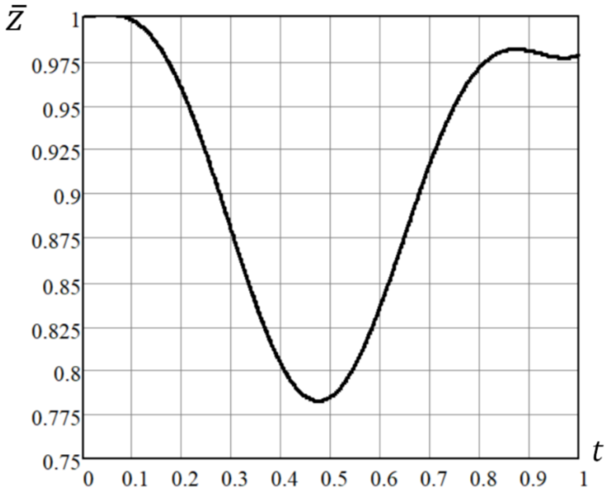

Рис. 5. Изменение относительного запаса товаров $\bar{z} = z(t)/z(t_0)$ с течением времени

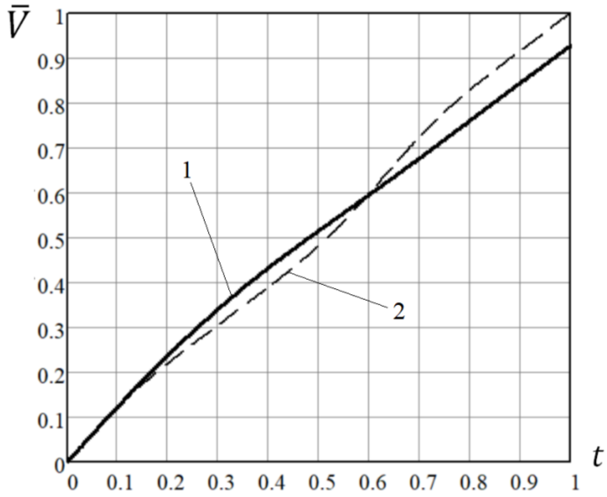

Рис. 6. Изменение относительных суммарных издержек производства и хранения товаров:

$$1 - \bar{V} = V[Q_*(t)]|_{z(t_0)=z_0} \Big/ V[Q(T)]|_{\substack{q(t)=r(t) \\ z(t)=z_0}};$$

$$2 - \bar{V} = V[Q(t)]|_{\substack{q(t)=r(t) \\ z(t)=z_0}} \Big/ V[Q(T)]|_{\substack{q(t)=r(t) \\ z(t)=z_0}}$$

Обсуждение результатов исследования. Сравним суммарные издержки производства и хранения товаров за период T для плана производства $Q_*(t)$, являющегося экстремалью функционала (6), и для плана производства $q(t) = r(t)$, совпадающего с потребностью в товарах в заданный момент времени при одинаковом начальном запасе товаров $z(t_0) = z_0$. Согласно рис. 6, суммарные издержки за период T в случае оптимального плана производства (кривая 1) на 8,5 % меньше суммарных издержек, когда объём выпуска совпадает с объёмом потребностей (кривая 2). При этом следует отметить, что в случае оптимального плана производства запас товаров к концу периода T уменьшается на 2 % по сравнению с запасом товаров на начало периода (см. рис. 5), а в случае плана производства товаров по схеме $q(t) = r(t)$ запас товаров остаётся в течение всего периода постоянным. Поэтому сравним суммарные издержки оптимального плана производства при начальном запасе товаров $z(t_0) = z_0$ с суммарными издержками плана производства по схеме $q(t) = r(t)$ при запасе товаров $z(t) = z(T) = \text{const}$. Таким образом, для обоих планов производства в конце периода T запас товаров будет одинаковым. В этом случае суммарные издержки за период T при оптимальном плане производства на 6,6 % меньше суммарных издержек, когда объём выпуска совпадает с объёмом потребностей.

Заключение. В рамках исследования рассмотрено решение вариационной задачи о суммарных издержках производства и хранения продукции с подвижной правой границей, предложена математическая модель расчёта оптимального плана производства, при котором достигаются минимальные издержки производства и хранения продукции, предложена методика для решения проблемы отрицательности запаса продукции на рассматриваемом временном периоде, а также определены условия, накладываемые на функцию производственных издержек, при которых решаемая оптимизационная задача имеет смысл. Результаты научного исследования могут найти практическую реализацию с целью повышения эффективности деятельности предприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шукурьян, С. И. Выбор оптимального плана производства продукции при постоянных издержках производства (на примере молокозавода) / С. И. Шукурьян, Е. В. Васильева // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2014. – № 4-2. – С. 195-200.

2. Козоногова, Е. В. Расчёт оптимального плана производства в условиях неопределённости в начальных данных / Е. В. Козоногова // Журнал научных и прикладных исследований. – 2015. – № 9. – С. 22-24.
3. Луцик, Л. В. Оптимальные планы производства продукции двух видов с учётом влияния нормы выпуска одного из продуктов / Л. В. Луцик // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2019. – № 1-2. – С. 51-56.
4. Покровский, М. А. Маржинальный анализ оптимального плана производства промышленного предприятия / М. А. Покровский // Контроллинг. – 2013. – № 48. – С. 10-15.
5. Меерсон, А. Ю. Вариационная задача оптимизации потребления модели экономической динамики Харрода-Домара с переменным коэффициентом капиталоёмкости прироста дохода / А. Ю. Меерсон, А. П. Черняев // Известия МГТУ МАМИ. – 2014. – Т. 4. – № 3 (21). – С. 77-79.
6. Сурнев, В. Б. О решении некоторых задач динамики экономических систем методом интегральных уравнений / В. Б. Сурнев, В. Б. Пяткова, А. И. Пятков // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2006. – № 4. – С. 105-119.
7. Максимов, В. П. Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики / В. П. Максимов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 4. – С. 124-135.
8. Низова, Л. М. Формирование инновационной среды для управления динамикой развития социально-экономических систем / Л. М. Низова // Инновационное развитие экономики. – 2013. – № 6(17). – С. 47-50.
9. Ланге, О. Оптимальные решения: Основы программирования / О. Ланге. – Москва: Прогресс, 1967. – 287 с.
10. Гончаренко, В. М. Математические методы в экономике и финансах / В. М. Гончаренко, В. Ю. Попова. – М.: КНОРУС, 2016. – 602 с.
11. Киселев, В. В. Частный случай решения задачи оптимальной динамики производства / В. В. Киселев, С. Р. Абдуллин // Дневник науки. – 2022. – № 12 (72). – URL: http://dnevniknauki.ru/images/publications/2022/12/physics/Kiselev_Abdullin.pdf (дата обращения: 06.11.2023). – Текст: электронный.
12. Цлаф, Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справочное руководство / Л. Я. Цлаф. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 192 с.
13. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2005. – 840 с.