

ФЛОТ И КОРАБЛЕСТРОЕНИЕ

FLEET AND SHIPBUILDING

Чижиумов С. Д.
S. D. Chizhiumov

05.08.06

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СУДНА НА ВОЛНЕНИИ MATHEMATICAL MODEL OF SHIP DYNAMICS IN A SEAWAY



Чижиумов Сергей Демидович — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры «Кораблестроение» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (г. Комсомольск

на Амуре). E-mail: chizhium@rambler.ru.

Sergey D. Chizhiumov — PhD in Engineering, Associate Professor at the Department of Shipbuilding Technology of the Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Komsomolsk-on-Amur). E-mail: chizhium@rambler.ru

Аннотация: Представляются математическая модель и численный алгоритм анализа динамики судна в условиях волнения. Движение волн моделируется заданием движения волнопродуктора. Численное интегрирование уравнений движения выполняется методом Рунге-Кутты. Потенциальные поля скоростей и ускорений жидкости в каждый момент времени определяются с помощью метода граничных элементов с дискретизацией всех границ (смоченной поверхности судна, свободной поверхности воды и поверхности волнопродуктора). Применяется процедура итерационного уточнения потенциала ускорений, позволяющая корректно учесть закон сохранения гидродинамического равновесия.

Summary: The paper presents a mathematical model and numerical algorithm for analysis of a ship dynamics in a seaway. Storm waves are simulated by setting of wavemaker motion. Numerical integration of motion equations is executed by a Runge-Kutta method. The potential fields of water velocity and acceleration at each moment are determined using the boundary element method and with sampling of all boundaries (wetted surface of a ship, free surface of water and surface of a wavemaker). The iterative procedure of acceleration potential correlation is applied for correct accounting of the conservation law of hydrodynamic equilibrium.

Ключевые слова: Метод граничных элементов, волны, судно, динамика, потенциал ускорений.

Keywords: boundary element method, waves, ship, dynamics, acceleration potential.

Введение

Проблема определения параметров движения судна на штормовой волне — одна из наиболее трудных и одновременно актуальных проблем, связанных с безопасностью судна.

В последние десятилетия были значительно развиты компьютерные технологии анализа морского волнения и качки судов на волнении, получившие обобщённое название «численный волновой бассейн» — Numerical Wave Tank [7]. Однако по настоящее время существуют проблемы внедрения этих технологий в практику проектирования и эксплуатации морской техники, связанные с вычислительными затратами и достоверностью результатов расчётов.

В работах [3; 4; 5; 6] была предложена численная методика анализа качки судна на основе метода граничных элементов, в которой введение допущения о неизменности формы волновой поверхности от присутствия судна позволило существенно сократить вычислительные затраты. В данной работе описывается методика, свободная от этого допущения, позволяющая получить более достоверные результаты. В ней применяется процедура итерационного уточнения потенциала ускорений [7], позволяющая корректно учесть закон сохранения гидродинамического равновесия.

Общие уравнения динамики судна

Введём две декартовы системы координат [2]: 1) неподвижную $Oxyz$; 2) подвижную, связанную с судном $G\xi\eta\zeta$. Плоскость Oxy неподвижной системы совпадает с невозмущённой поверхностью моря, ось Z направлена вниз. Начало координат корабельной системы G находится в центре тяжести судна, а оси направлены: ξ — в нос; η — на правый борт; ζ — на днище судна. Для удобства представления векторов с применением матриц их иногда записывают в различных формах. Примеры записи координат и их компонентов x, y, z и ξ, η, ζ :

$$x = x(x, y, z) = x(x_1, x_2, x_3) = \{x\};$$
$$\eta = \eta(\xi, \eta, \zeta) = x(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \{\eta\}.$$

Системы координат связаны между собой следующей зависимостью

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_g + \mathbf{x}_\theta = \mathbf{x}_g + \mathbf{L}\boldsymbol{\eta}$$

или $\{x\} = \{x_g\} + [L]\{\eta\}$, (1)

где

$$x_g = \begin{Bmatrix} x_{g1} \\ x_{g2} \\ x_{g3} \end{Bmatrix}; \quad L = [L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix};$$

$l_{ij} = \cos(x_i, \eta_j)$ — направляющие косинусы. Вектор x_g определяет центр тяжести G, а вектор x_g — текущую точку судна P относительно центра тяжести в общей системе координат.

Для составления уравнений движения введём также систему обобщённых координат, в качестве которых примем линейные и угловые перемещения (см. рис. 1):

$$q = q(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = q(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \phi, \psi, \chi). \quad (2)$$

Корабельная система координат движется вместе с судном с поступательной $v_g = v_g(v_{g1}, v_{g2}, v_{g3})$ и угловой $w = w(w_1, w_2, w_3)$ скоростью.

При наличии корабельной системы координат, совершающей произвольное движение (то есть неинерциальной системы), дифференцирование по времени в неподвижной системе отсчёта должно выполняться в соответствии с правилом [2; 7]:

$$d/dt = d'/dt + w \times,$$

где d' означает дифференцирование в подвижной системе координат при фиксированном положении осей в пространстве.

Используя это правило, получим векторы скорости и ускорения произвольной точки P в виде:

$$v = dx/dt = \dot{x} = \dot{x}_g + \dot{x}_\theta = v_g + d'x_\theta/dt + \omega \times x_\theta, \quad (3)$$

$$a = \ddot{x} = \ddot{x}_g + \ddot{x}_\theta = a_g + d'^2x_\theta/dt^2 + \omega \times d'x_\theta/dt + \dot{\omega} \times x_\theta + \omega \times d'x_\theta/dt + \omega \times (\omega \times x_\theta), \quad (4)$$

где a_g — поступательное ускорение, $\dot{\omega} \times x_\theta$ — танген-

циальное ускорение (здесь учтено, что $\dot{\omega} = d'\omega/dt$); $\omega \times (\omega \times x_\theta)$ — центробежное ускорение, d'^2x_θ/dt^2 — ускорение точки P в подвижной системе координат; $2\omega \times d'x_\theta/dt$ — кориолисово ускорение.

Уравнения поступательного и вращательного движений судна с учётом перехода от корабельной системы координат:

$$m a_g = m d'v_g/dt + \omega \times m v_g = d'Q/dt + \omega \times Q = F,$$

$$I \dot{\omega} = I d'\omega/dt + \omega \times I \omega = d'H/dt + \omega \times H = M, \quad (5)$$

где m, I — тензоры инерции и моментов инерции судна:

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_{\xi\xi} & I_{\xi\eta} & I_{\xi\zeta} \\ I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & I_{\eta\zeta} \\ I_{\zeta\xi} & I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Q — количество движения, H — момент количества движения, F — внешняя сила, действующая на судно, M — момент внешних сил; m — масса судна, I_{ij} — моменты инерции судна. В проекциях на оси корабельной системы координат получим:

$$m a_{\xi\xi} = m(\dot{v}_{\xi\xi} + v_{\xi\xi} \omega_\eta - v_{\xi\eta} \omega_\xi) = F_\xi,$$

$$m a_{\xi\eta} = m(\dot{v}_{\xi\eta} + v_{\xi\xi} \omega_\zeta - v_{\xi\zeta} \omega_\xi) = F_\eta,$$

$$m a_{\xi\zeta} = m(\dot{v}_{\xi\zeta} + v_{\xi\eta} \omega_\xi - v_{\xi\xi} \omega_\eta) = F_\zeta,$$

$$I_{\xi\xi} \dot{\omega}_\xi + (I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta}) \omega_\xi \omega_\eta + I_{\xi\zeta} (\dot{\omega}_\zeta - \omega_\zeta \omega_\xi) + I_{\xi\zeta} (\dot{\omega}_\zeta + \omega_\zeta \omega_\xi) + I_{\xi\zeta} (\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2) = M_\xi,$$

$$I_{\eta\eta} \dot{\omega}_\eta + (I_{\eta\eta} - I_{\xi\xi}) \omega_\xi \omega_\eta + I_{\eta\zeta} (\dot{\omega}_\zeta - \omega_\zeta \omega_\xi) + I_{\eta\zeta} (\dot{\omega}_\zeta + \omega_\zeta \omega_\xi) + I_{\eta\zeta} (\omega_\xi^2 - \omega_\zeta^2) = M_\eta,$$

$$I_{\zeta\zeta} \dot{\omega}_\zeta + (I_{\zeta\zeta} - I_{\xi\xi}) \omega_\xi \omega_\zeta + I_{\zeta\xi} (\dot{\omega}_\xi - \omega_\xi \omega_\zeta) + I_{\zeta\xi} (\dot{\omega}_\xi + \omega_\xi \omega_\zeta) + I_{\zeta\xi} (\omega_\xi^2 - \omega_\zeta^2) = M_\zeta.$$

Уравнение движения можно записать в обобщённом виде:

$$m_S \ddot{q} + b = F \quad (7)$$

или в развёрнутом матричном виде:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\xi\xi} & I_{\xi\eta} & I_{\xi\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & I_{\eta\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & I_{\zeta\xi} & I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{\xi\xi} \\ a_{\xi\eta} \\ a_{\xi\zeta} \\ \dot{\omega}_\xi \\ \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{Bmatrix} +$$

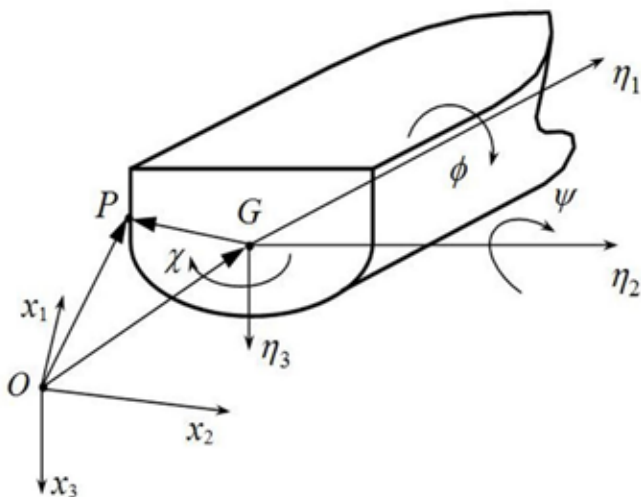


Рис. 1. Системы координат

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (I_{xx} - I_{yy})\omega_x \omega_z - I_{yy} \omega_x \omega_z + I_{xx} \omega_x \omega_z + I_{yz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) \\ (I_{yy} - I_{xx})\omega_x \omega_z - I_{yz} \omega_x \omega_z + I_{yy} \omega_x \omega_z + I_{xx} (\omega_x^2 - \omega_z^2) \\ (I_{yy} - I_{xx})\omega_x \omega_z - I_{xx} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_x \omega_z + I_{yy} (\omega_x^2 - \omega_z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix},$$

где m_s —матрица инерции (масс) судна; $\ddot{\mathbf{q}}$ —вектор обобщённых ускорений, \mathbf{b} —так называемый гироскопический момент; \mathbf{F} —вектор обобщённых внешних сил.

В правой части уравнения движения (7) сгруппированы внешние силы и моменты, включающие: силы тяги F_T ; вес судна F_G ; гидродинамические и гидростатические силы, обусловленные взаимодействием судна с идеальной жидкостью F_W ; не потенциальные силы сопротивления, обусловленные вязкостью жидкости и образованием вихрей F_F :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_F. (8)$$

Тяговая нагрузка F_T задаётся в зависимости от параметров двигателей и движителей.

Следует отметить, что разделение гидродинамических сил на составляющие F_W и F_F является условным. Процессы обтекания судна вязкой жидкости (обычно сложные, включающие ламинарные, турбулентные и переходные потоки, крупные вихри, волнообразование и разрушение волн, кавитацию) с трудом поддаются строгому математическому описанию. В настоящее время существуют методики и компьютерные программные средства, принципиально позволяющие выполнять анализ гидродинамики вязкой жидкости на основе решения уравнений Навье—Стокса, в том числе для турбулентных течений. Тем не менее, в задачах динамики судов на волнении такие средства требуют слишком больших вычислительных затрат. Кроме того, существуют разные численные модели турбулентности, пригодные для соответствующих режимов течений. Но при качке судна на штормовых волнах характер течения вокруг различных его частей постоянно изменяется. При анализе такого нестационарного процесса необходима смена разных моделей в различных областях, что приводит к резкому усложнению численных методик.

В связи с этим в большинстве практических задач качки судна используется допущение, что гидродинамические силы инерционной и вязкостной природы можно определять раздельно. При этом силы F_W находятся из решения задачи динамики идеальной жидкости. Для вычисления вязкостного сопротивления F_F существуют различные приближённые методики, основанные на результатах экспериментов и опыте эксплуатации судов.

Рассмотрим далее определение F_W , но предварительно отметим следующее. Известно, что в большинстве задач качки судов оправдывает себя модель безвихревого (потенциального) течения. В этом случае течение идеальной жидкости в односвязной области полностью характеризуется потенциалом скорости (однозначной функцией координат и времени).

Строгая теория нестационарного потенциального течения основана на теоремах Томсона и Лагранжа. Теорема Томсона о циркуляции заключается в том, что если объём идеальной жидкости находится под действием потенциальных массовых сил, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру остаётся неизменной во всё время движения. Следствием этой теоремы является теорема Лагранжа, доказывающая, что если объём идеальной жидкости находится под действием потенциальных массовых сил и в безвихревом потенциальном движении, то он останется в безвихревом потенциальном движении и в последующие моменты времени. В частном случае, если движение жидкости начинается из состояния покоя, то оно будет безвихревым и потенциальным.

Для определения сил F_W , действующих на судно, следует проинтегрировать давления p по смоченной поверхности судна:

$$\mathbf{F}_W = \int_{S_s} p \mathbf{n} dS \quad \mathbf{M}_W = \int_{S_s} p \mathbf{n} \times \mathbf{r} dS, (9)$$

где F_W и M_W —гидродинамические сила и момент; \mathbf{n} и \mathbf{r} —нормаль к поверхности судна и вектор положения точки поверхности относительно начала корабельной системы координат; S_s —смоченная поверхность судна.

Давление в идеальной жидкости можно получить из интеграла Коши—Лагранжа:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gz \right) = -\rho \Phi - \rho gz, (10)$$

где ρ —плотность жидкости; φ —потенциал скорости; t —время; g —ускорение свободного падения; Φ —потенциал ускорения [7], состоящий и линейной ($\varphi_t = \partial \varphi / \partial t$) и нелинейной ($v^2/2$) частей.

Для определения потенциальных функций φ и φ_t большое значение имеет теорема о существовании и единственности потенциального поля: если в каждой точке границы односвязного объёма однозначно заданы либо потенциал, либо его производная по нормали к границе, то внутри такого объёма существует поле с однозначным значением потенциала в любой точке. Из однозначности значения $\partial \varphi / \partial n$ на границе следует требование к её гладкости (отсутствию углов).

Поле скоростей жидкости в фиксированный момент времени определяется решением смешанной

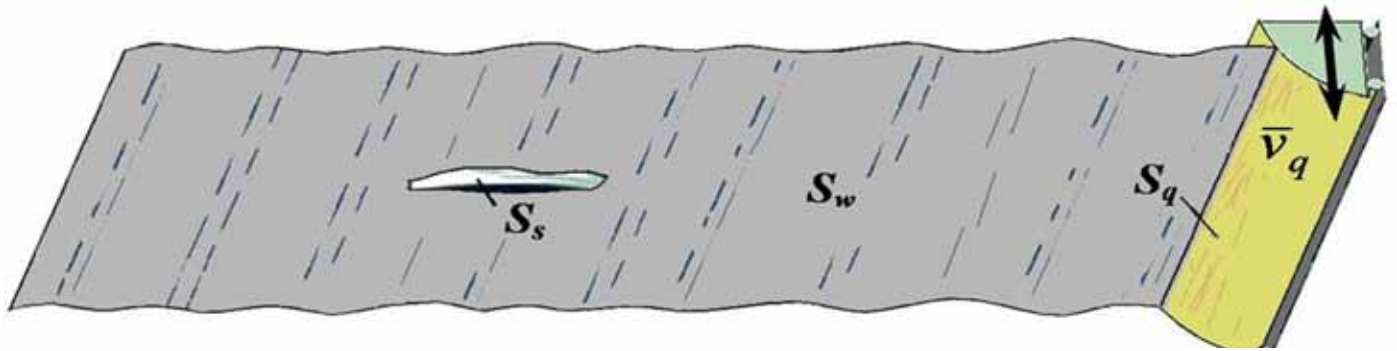


Рис. 2. Совместная модель волнообразования и качки судна

краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta \varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (11)$$

$$\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}_w, \quad \text{на} \quad S_w, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial n} = \bar{v}_s, \quad \text{на} \quad S_s, \quad (13)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi = 0; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_\infty, \quad (14)$$

где Ω — область жидкости, $S = S_s + S_w + S_\infty$ — граница области Ω , состоящая из смоченной поверхности судна S_s , свободной поверхности S_w и условной границы S_∞ на большом удалении R от судна; $\bar{\varphi}_w$ и \bar{v}_s — предварительно определяемые значения потенциала скорости и нормальной составляющей скорости на соответствующих участках границы. Определение $\bar{\varphi}_w$ и \bar{v}_s будет рассмотрено далее.

При наличии дна или твердых стенок S_b , ограничивающих объём жидкости, условие (13) следует применить к этим границам с учетом их неподвижности: $\bar{v}_b = 0$.

Волновое движение жидкости можно задать путём введения некоторой подвижной части границы S_q — волнопродуктора (см. рис. 2). На этой границе вводится условие (13) с заданным движением $\bar{v}_q(t)$.

Уравнение Лапласа (11) для потенциала скорости жидкости является следствием закона сохранения массы и выводится из уравнения неразрывности в случае потенциального течения. Для определения линейной части потенциала ускорения φ_i также может быть использована система (11) — (14) — в ней необходимо только заменить φ на φ_i [7]. При этом уравнение Лапласа относительно φ_i выражает закон

сохранения гидродинамического равновесия и закон сохранения энергии (так как для вычисления силы F_w рассматривается консервативная система, то есть течение идеальной жидкости полагается без потери энергии).

Прежде чем решать систему уравнений (11) — (14) для функций φ и φ_i , необходимо получить выражения для граничных условий на свободной поверхности (12) и на смоченной поверхности судна (13), то есть $\bar{\varphi}_w$, \bar{v}_s , $\bar{\varphi}_w$ и \bar{v}_s . Очевидно, что эти условия в нестационарной задаче изменяются во времени и определяются движением судна и поверхности воды. Поэтому в конкретный момент времени t они вычисляются после решения уравнений движения (7) — (10) для предыдущих моментов времени.

Для решения уравнений движения требуется задать начальные условия (в момент времени t_0): положение судна и других границ, условия (12) и (13). При этом если движение начинается из состояния покоя, то $\bar{\varphi}_w(t_0) = 0$.

В последующие моменты времени t потенциал скорости на свободной границе можно вычислить с применением конечных разностей [3]:

$$\bar{\varphi}_w(t) = \varphi_w(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^t \frac{d\varphi}{dt} dt \approx \varphi_w(t_{i-1}) + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{w(t_{i-1})} \cdot \Delta t,$$

где Δt — шаг между расчётными моментами времени. В этой формуле пока неизвестна скорость изменения потенциала в момент времени t_{i-1} . Определим её (индексы пока для краткости опустим):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \varphi_t + (\nabla \varphi)^2.$$

На свободной поверхности воды $p = 0$. Отсюда из (10) получим:

$$\varphi_t = \bar{\varphi}_{tw} = -\frac{1}{2}(\nabla\varphi_w)^2 - gz, \quad (15)$$

Тогда $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gz$. В результате для граничного условия (12) на свободной поверхности получим:

$$\bar{\varphi}_{wi} \approx \varphi_{w(i-1)} + \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gz \right)_{w(i-1)} \Delta t, \quad (16)$$

Для кинематического граничного условия (13) на смоченной поверхности судна определим нормальные скорости и ускорения точек этой поверхности с учётом (3) и (4):

$$\bar{v}_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_g + \mathbf{d}'\mathbf{x}_\theta / dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\theta),$$

$$v_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}_g + d^2\mathbf{x}_\theta / dt^2 + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}'\mathbf{x}_\theta / dt + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_\theta + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\theta)) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \right).$$

С учётом ортогональности векторов \mathbf{n} и $\mathbf{d}'\mathbf{x}_\theta / dt$ эти выражения могут быть приведены к виду [7]:

$$\bar{v}_s = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\theta), \quad (17)$$

$$v_{ts} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}_g + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_\theta) + q, \quad (18)$$

где $q = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\theta) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}'\mathbf{x}_\theta / dt) - k_n (d'\mathbf{x}_\theta / dt)^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \right)$, (19) k_n — нормальная кривизна поверхности судна вдоль линии тока, $\mathbf{d}'\mathbf{x}_\theta / dt = \nabla\varphi - \mathbf{v}_g - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\theta$. В формуле (18) первое слагаемое соответствует ускорению плавающего тела, а слагаемые в (19) можно вычислить, определив поле скоростей жидкости.

Численный волновой бассейн

Практическая реализация математической модели, рассмотренной в п. 2.1, без дополнительных упрощений возможна только с применением компьютерного моделирования. Методическое и программное обеспечение, реализующее подобные математические модели, получило обобщённое название «численный волновой бассейн» (Numerical Wave Tank).

В основе численного волнового бассейна лежат численные методы и алгоритмы решения уравнений

движения (7) — (10) с начальными условиями (задачи Коши) и уравнений, выражающих законы сохранения для идеальной жидкости (краевой задачи для уравнения Лапласа (11) — (14)).

Применение метода граничных элементов.

Потенциальные линейные функции φ и φ_t в любой момент времени должны удовлетворять уравнениям (11) — (14). Допустим, что условия (14) выполняются. Тогда смешанная краевая задача для уравнения Лапласа относительно функции φ может быть записана в виде:

$$\Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\varphi(x) = \bar{\varphi} \quad \text{на } S_\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} = \bar{v} \quad \text{на } S_v,$$

где x — некоторая точка области Ω с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) , $S = S_\varphi + S_v$ — граница области Ω , состоящая из частей, на которых заданы соответственно $\bar{\varphi}$ и \bar{v} .

Существуют способы решения данной задачи, например, методом Бубнова-Галеркина с преобразованием интегралов по объёму к интегралам по границам по теореме Остроградского-Гаусса [1]. В результате можно получить граничное интегральное уравнение:

$$c(\xi)\varphi(\xi) + \int_{S_\varphi} \bar{\varphi}(x)v^*(\xi,x)dS(x) + \int_{S_v} \varphi(x)v^*(\xi,x)dS(x) =$$

$$= \int_{S_\varphi} v(x)\varphi^*(\xi,x)dS(x) + \int_{S_v} \bar{v}(x)\varphi^*(\xi,x)dS(x)$$

или

$$c(\xi)\varphi(\xi) + \int_S \varphi(x)v^*(\xi,x)dS(x) = \int_S v(x)\varphi^*(\xi,x)dS(x) \quad (20)$$

где ξ — некоторая точка области Ω с декартовыми координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ; $c(\xi)$ — относительный внутренний угол границы в точке ξ (для точки на гладкой границе $c = 0,5$, для внутренней точки $c = 1$); φ^* — фундаментальное решение для уравнения Лапласа;

$$v^* = \frac{\partial\varphi^*}{\partial n}$$

Фундаментальное решение для оператора Лапласа представляет потенциал источника единичной интенсивности в бесконечной области [1]:

$$\varphi^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi R(\xi, x)}, \quad (21)$$

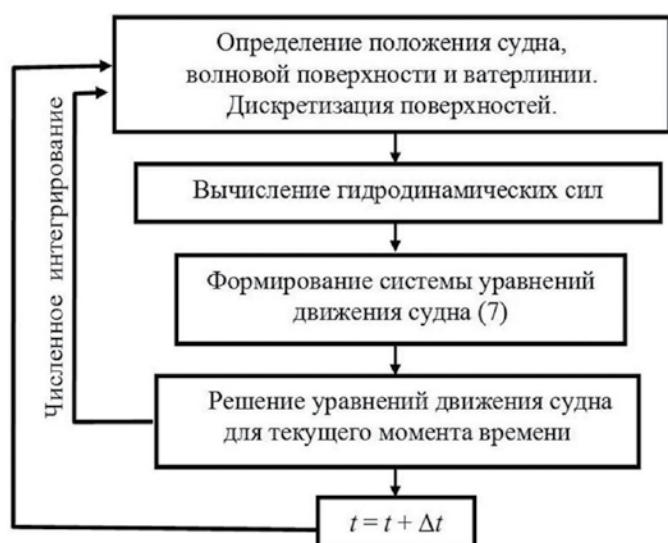


Рис. 3. Обобщённая блок-схема решения задачи о качке судна

где ξ —точка, в которой расположен источник; x —текущая точка (точка наблюдения); R —расстояние между этими точками.

При решении интегрального уравнения (20) не обязательно рассматривать внутренние точки области Ω . Если интерес представляет только решение на границе, то при применении численной процедуры система алгебраических уравнений будет иметь существенно меньший порядок.

Метод граничных элементов (МГЭ) является численным методом решения уравнения (20). Он заключается в следующем [1]: искомые функции $\varphi(x)$ и $v(x)$ (на границах S_v и S_φ соответственно) представляются в виде рядов:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i(x),$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v_i u_i(x),$$

(22)

где φ_i и v_i —значения искомых функций в заданных точках (узлах) на границе S ; $u_i(x)$ —заданные аппроксимирующие (базисные) функции локального вида (они не равны нулю в малых окрестностях точки i границы S , которые называют граничными элементами); n —число узлов на границе S . Формулы (22) можно представить отдельно для каждого граничного элемента (ГЭ) k в виде:

$$\varphi_k(\eta) = \sum_{j=1}^m \varphi_{jk} u_{jk}(\eta) = \{U\}_k^T \{\varphi\}_k,$$

$$v_k(\eta) = \sum_{j=1}^m v_{jk} u_{jk}(\eta) = \{U\}_k^T \{v\}_k, \quad (23)$$

где η —точка границы в местной нормированной системе координат граничного элемента; m —число узлов элемента.

Подставим (23) в (20). При этом заменим интегралы по границе суммами интегралов по граничным элементам, учитывая свойство локальности базисных функций. Уравнение (20) для каждого узла i принимает вид:

$$c(\xi_i) \varphi(\xi_i) + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \{U\}_k^T v^*(\xi_i, \eta_k) dS_k \{\varphi\}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \{U\}_k^T \varphi^*(\xi_i, \eta_k) dS_k \{v\}_k, \quad (24)$$

где N —число элементов. Систему уравнений (24) можно записать в матричном виде:

$$[H] \{\varphi\} = [G] \{v\}, \quad (25)$$

где $[H]$ и $[G]$ —заполненные, несимметричные матрицы порядка $n \times n$; $\{\varphi\}$ и $\{v\}$ —векторы узловых значений функций φ и v .

Алгоритм решения задачи

В качестве исходных данных к расчету динамики судна задаются: граничные поверхности; массовые характеристики и геометрия корпуса судна (в корабельной системе координат); упор винта; движение волно-продуктора; коэффициенты вязкостного сопротивления и др.

Обобщённая блок-схема расчёта представлена на рисунке 3. Интегрирование уравнения движения судна (7) можно выполнить одним из численных методов, например методом Рунге-Кутты.

Гидродинамические силы F_w определяются путём интегрирования давлений по смоченной поверхности судна по формулам (9). Для вычисления давлений используется формула (10). Потенциальное поле скоростей жидкости в каждый момент времени определяется с помощью МГЭ с дискретизацией всех границ (смоченной поверхности судна, прилегающей свободной поверхности воды, поверхностей волнопродуктора и, при ограниченной глубине или ширине расчётного бассейна, его дна или стенок).



Рис. 4. Блок-схема решения задачи о качке судна

В формулу (10) входит линейная часть потенциала ускорений $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$, вычисление которой представляет проблему.

В некоторых простых задачах возможно вычисление этой величины с помощью конечной разности [4; 5; 6]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{\Delta t}$$

Однако значение потенциала скорости в фиксированной точке в один из моментов времени (t_i или t_{i+1}) может оказаться неопределённым, если при движении смоченной поверхности эта точка оказывается за пределами области жидкости. Исключить эту неопределённость или уменьшить её влияние можно только приближёнными способами экстраполяции в сочетании с уменьшением Δt и размеров граничных элементов. Этот способ для подвижной границы не гарантирует сходимости процесса численного

расчёта.

Более трудоёмким, но корректным является определение φ_t из решения краевой задачи (11)–(14) — в ней необходимо только заменить φ на φ_t [7]:

$$\Delta\varphi_t(x, y, z) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (26)$$

$$\varphi_t(x, y, z) = \bar{\varphi}_{tw}, \quad \text{на } S_w \quad (27)$$

$$\frac{\partial\varphi_t(x, y, z)}{\partial n} = \bar{v}_{ts}, \quad \text{на } S_s \quad (28)$$

Решается данная задача с помощью МГЭ. Фундаментальное решение типа (21) позволяет автоматически удовлетворить условиям на бесконечности. Для решения этой задачи необходимо предварительно определить граничные условия, то есть значения $\bar{\varphi}_{tw}$ и \bar{v}_{ts} по формулам (15) и (18). Для определения $\bar{\varphi}_{tw}$ вначале должна быть решена краевая задача относительно потенциала скорости.

Для вычисления \bar{v}_{ts} необходимы ускорения судна. Для текущего момента времени они неизвестны. Методы решения этой проблемы можно найти в работе [7]. Наиболее прост итерационный подход, в соответствии с которым на первом итерационном шаге ускорения a_w и w задаются приближённо. В качестве первого приближения удобно использовать значения ускорений на предыдущем шаге по времени.

В результате уточнённая блок-схема численного моделирования движения судна имеет вид, представленный на рисунке 4.

При выборе метода численного интегрирования уравнений движения по времени важно обеспечить устойчивость и достаточную точность вычислений. На практике хорошие результаты даёт метод Рунге-Кутты (четвёртого порядка точности) и метод Рунге-Кутты-Гила (пятого порядка точности). С применением этих методов движение волн и качку судна можно моделировать с удовлетворительной точностью при шаге по времени $\Delta t \leq T_w/20$, где T_w — период волн. Шаг Δt также должен быть согласован с размерами граничных элементов Δx . Ориентировочная оценка:

$$\Delta t \leq 1.6 \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$$

Приведём схему численного интегрирования методом Рунге-Кутты [7]. Для этого введём обозначения: $x_{wj}(t)$ — вектор положения узла волновой поверхности; $\varphi_{wj}(t)$ — потенциал скорости в узле волновой

Чижимов С. Д.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СУДНА НА ВОЛНЕНИИ

Коэффициенты	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
Метод Рунге-Кутта	0	$\frac{1}{2}$	0	1	2	2
Метод Рунге-Кутта-Гила	$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$	$\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$

Рис. 4. Блок-схема решения задачи о качке судна

поверхности; $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ — векторы перемещения, скорости и ускорения судна; $S(t) = S(x_{wj}(t), q(t))$ — граница расчётной области жидкости, определяемая положением узлов волновой поверхности и судна; $\varphi(S(t))$ и $\varphi_0(S(t))$ — потенциал скорости и потенциал ускорений на границе $S(t)$, полученные по МГЭ.

Численное интегрирование на каждом шаге по времени Δt выполняется в четыре этапа:

— первый этап:

$$\begin{aligned} \Delta x_{wj1} &= \nabla \varphi(S(t)) \Delta t; & x_{wj1} &= x_{wj}(t) + \frac{1}{2} \Delta x_{wj1}; \\ \Delta \varphi_{wj1} &= (-gz_j + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(S(t)))^2) \Delta t; & \varphi_{wj1} &= \varphi_{wj}(t) + \frac{1}{2} \Delta \varphi_{wj1}; \\ \Delta \dot{q}_1 &= \ddot{q}(\varphi(S(t)), \varphi_0(S(t))) \Delta t; & \dot{q}_1 &= \dot{q}(t) + \frac{1}{2} \Delta \dot{q}_1; \\ \Delta q_1 &= \dot{q}(t) \Delta t; & q_1 &= q(t) + \frac{1}{2} \Delta q_1; \end{aligned}$$

$S_1 = S(x_{wj1}, q_1)$ — перестроение и разбиение границ;

$\varphi(S_1)$ вычисляется по МГЭ; $\varphi_0(S_1)$ вычисляется по МГЭ;

— второй этап:

$$\begin{aligned} \Delta x_{wj2} &= \nabla \varphi(S_1) \Delta t; & x_{wj2} &= x_{wj}(t) + c_1 \Delta x_{wj1} + c_2 \Delta x_{wj2}; \\ \Delta \varphi_{wj2} &= (-gz_{j1} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(S_1))^2) \Delta t; & \varphi_{wj2} &= \varphi_{wj}(t) + c_1 \Delta \varphi_{wj1} + c_2 \Delta \varphi_{wj2}; \\ \Delta \dot{q}_2 &= \ddot{q}(\varphi(S_1), \varphi_0(S_1)) \Delta t; & \dot{q}_2 &= \dot{q}(t) + c_1 \Delta \dot{q}_1 + c_2 \Delta \dot{q}_2; \\ \Delta q_2 &= \dot{q}_1 \Delta t; & q_2 &= q(t) + c_1 \Delta q_1 + c_2 \Delta q_2; \\ S_2 &= S(x_{wj2}, q_2) - \text{перестроение и разбиение границ;} \\ \varphi(S_2) &\text{ вычисляется по МГЭ; } \varphi_0(S_2) \text{ вычисляется по МГЭ;} \end{aligned}$$

— третий этап:

$$\begin{aligned} \Delta x_{wj3} &= \nabla \varphi(S_2) \Delta t; & x_{wj3} &= x_{wj}(t) + c_3 \Delta x_{wj2} + c_4 \Delta x_{wj3}; \\ \Delta \varphi_{wj3} &= (-gz_{j2} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(S_2))^2) \Delta t; & \varphi_{wj3} &= \varphi_{wj}(t) + c_3 \Delta \varphi_{wj2} + c_4 \Delta \varphi_{wj3}; \\ \Delta \dot{q}_3 &= \ddot{q}(\varphi(S_2), \varphi_0(S_2)) \Delta t; & \dot{q}_3 &= \dot{q}(t) + c_3 \Delta \dot{q}_2 + c_4 \Delta \dot{q}_3; \\ \Delta q_3 &= \dot{q}_2 \Delta t; & q_3 &= q(t) + c_3 \Delta q_2 + c_4 \Delta q_3; \\ S_3 &= S(x_{wj3}, q_3) - \text{перестроение и разбиение границ;} \\ \varphi(S_3) &\text{ вычисляется по МГЭ; } \varphi_0(S_3) \text{ вычисляется по МГЭ;} \end{aligned}$$

— четвёртый этап:

$$\begin{aligned} \Delta x_{wj4} &= \nabla \varphi(S_3) \Delta t; & x_{wj}(t+\Delta t) &= x_{wj}(t) + \frac{1}{6} (\Delta x_{wj1} + c_5 \Delta x_{wj2} + c_6 \Delta x_{wj3} + \Delta x_{wj4}); \\ \Delta \varphi_{wj4} &= (-gz_{j3} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(S_3))^2) \Delta t; \\ \varphi_{wj}(t+\Delta t) &= \varphi_{wj}(t) + \frac{1}{6} (\Delta \varphi_{wj1} + c_5 \Delta \varphi_{wj2} + c_6 \Delta \varphi_{wj3} + \Delta \varphi_{wj4}); \\ \Delta \dot{q}_4 &= \ddot{q}(\varphi(S_3), \varphi_0(S_3)) \Delta t; & \dot{q}(t+\Delta t) &= \dot{q}(t) + \frac{1}{6} (\Delta \dot{q}_1 + c_5 \Delta \dot{q}_2 + c_6 \Delta \dot{q}_3 + \Delta \dot{q}_4); \\ \Delta q_4 &= \dot{q}_3 \Delta t; & q(t+\Delta t) &= q(t) + \frac{1}{6} (\Delta q_1 + c_5 \Delta q_2 + c_6 \Delta q_3 + \Delta q_4); \\ S(t+\Delta t) &= S(x_{wj}, q_3) - \text{перестроение и разбиение границ;} \\ \varphi(S(t+\Delta t)) &\text{ вычисляется по МГЭ; } \varphi_0(S(t+\Delta t)) \text{ вычисляется по МГЭ.} \end{aligned}$$

Коэффициенты c_k в этих формулах определяются по таблице.

ЛИТЕРАТУРА

- Бреббия, К. Методы граничных элементов: Пер. с англ./К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Врубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с..
- Справочник по теории корабля. Том 2. Статика судов. Качка судов./Под ред. Я.И. Войткунского. — Л.: Судостроение, 1985. — 440 с.
- Чижимов, С. Д. Численные модели в задачах динамики судна/С. Д. Чижимов. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1999. — 182 с.
- Чижимов, С. Д. Численное моделирование продольной качки судна/С. Д. Чижимов // Вестник Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета: Сб. науч. тр. — Комсомольск на Амуре: КНАГТУ, 2004.
- Chizhiumov, S. D. Numerical Modeling of Ship Motion in Heavy Sea Conditions/S. D. Chizhiumov // 6th ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium (ISOPE PACOMS-2004). Vladivostok, Russia, September 12-16, 2004.
- Chizhiumov, S. D. Numerical Modeling of Ship Motion in Waves/S. D. Chizhiumov, D. V. Proshukalo // 18th Asian Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM—2004). Vladivostok, Russia, October 11-14, 2004.
- Tanizawa, K. The State of Art on Numerical Wave Tank // Proc. 4th Osaka Colloquium on Seakeeping Performance of Ships, Osaka, Japan, 2000—pp. 95-113.