

Феоктистов С. И., Белых С. В., Станкевич А. В., Кривенок А. А., Перевалов А. А.

05.07.02

S.I.Feoktistov, S.V.Belov, A.V.Stankevitch, A.A.Krivenok, A.A.Perevalov

### **АППРОКСИМАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ КОНТУРА ДУГАМИ ПРИ КОНТРОЛЕ ТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ APPROXIMATION OF CONTOUR GEOMETRY BY CURVES WHILE CONTROLLING THE ACCURACY OF MANUFACTURE OF PARTS AND COMPONENTS FOR AIRBORN DEVICES**



**Феоктистов Сергей Иванович** — доктор технических наук, профессор, декан ССФ  
**Sergey I. Feoktistov** — Doctor in Engineering, Professor



**Кривенок Антон Александрович** — программист ОАО «КНААПО»  
**Anton A. Krivenok** — programmer, JSC «КнаАПО»



**Белых Сергей Викторович** — кандидат технических наук, доцент  
**belykh.sergey@mail.ru**  
**Sergey V. Belykh** — PhD in Engineering, Associate Professor, E-mail: **belykh.sergey@mail.ru**



**Перевалов Анатолий Анатольевич** — аспирант  
**Anatoly A. Perevalov** — PhD candidate



**Станкевич Антон Владиславович** — начальник научно-производственной лаборатории технологических процессов ОАО «КНААПО»  
**Anton V. Stankevitch** — Head of Research and Production Lab for Manufacturing Processes, JSC «КнаАПО»

**Аннотация:** Рассмотрены проблемы контроля деталей авиационного назначения, получаемых методами гибки. Обосновано применение аппроксимации дугами набора точек, полученных в результате контроля с использованием. Дано решение для определения дуги, проходящей через набор точек с различными граничными условиями. Приведена оценка влияния граничных условий аппроксимации на точность получаемой кривой.

**Summary:** The problems of accuracy control for aviation technology parts and components produced by

forming/bending are looked into. Approximation by curves of a set of points acquired as the result of accuracy control using... was proven. A solution for the task of determining a curve going through a set of points with different boundary conditions is provided. Estimation of the impact of the boundary conditions of approximation upon the accuracy of the resulting curve is carried out.

**Ключевые слова:** аппроксимация, геометрия контура, дуга.

**Keywords:** approximation, contour geometry, curve.

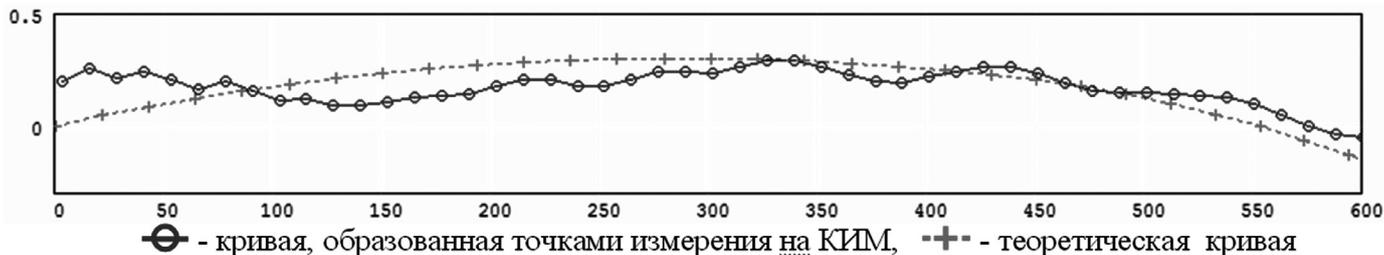


Рис. 1. Начальный участок плоских кривых, полученных функциональным и экспериментальным путем

Жесткая конкуренция на рынке авиационной продукции требует от производителей сокращения сроков производства, снижения стоимости изготовления продукции при повышении качества деталей. Решение этих противоречивых задач возможно при автоматизации технологических процессов и сокращении цепочки технологической увязки элементов планера. Уход от жестких носителей форм и размеров (плазы, шаблоны, эталоны и т.д.) и внедрение систем электронного описания изделия требует пересмотра всей цепочки технологии изготовления и контроля деталей самолета.

В конструкции летательных аппаратов широко применяются детали, при изготовлении которых используются операции холодной штамповки. Разброс механических и геометрических характеристик заготовок от партии к партии может сильно сказываться на процессе деформирования и соответственно влиять на точность готовых деталей. Эта особенность значительно затрудняет процесс автоматизации данного вида производства, требуя введения трудоемких операций ручной доводки деталей ЛА до полного прилегания к контрольной оснастке. В связи с этим на ОАО «КНААПО» отработывается методика корректировки управляющих программ для гибочного станка с ЧПУ по результатам измерения геометрии первой детали в партии.

В процессе контроля геометрии готовой детали современные контрольно-измерительные машины (КИМ) позволяют получить облако точек обмера, и, расположив в нем электронную модель детали, можно сделать вывод, насколько соответствует или не соответствует готовая деталь ее электронной модели. Однако для корректировки управляющих программ необходимо оперировать значениями радиусов кривизн на определенных участках. Для определения формы кривой, проходящей через набор точек, используются различные методы аппроксимации. Ряд исследований, проведенных в этой области, показывают на то, что наиболее точно такую кривую можно описать, используя b-сплайны. При этом следует учитывать, что в процессе изготовления и контроля детали накапливается погрешность и на участке детали с условно постоянным радиусом контрольные точки замера на КИМ могут иметь некоторый разброс, что соответственно приведет к получению локальных значений кривизн в некоторых точках, значительно отличающихся от ожидаемых, а в некоторых местах будем иметь кривизну противоположного знака (см. рис. 1). Принимая во внимание тот факт, что управле-

ние ЧПУ ведется дискретно, а при расчете используется значение требуемого радиуса изгиба, то можно говорить о необходимости применения аппроксимации в виде дуг для оценки кривизны детали.

Предположим, что нам необходимо изготовить некоторую деталь, контур которой можно разделить на конечное число участков с условно постоянным радиусом. К числу таких деталей ЛА можно отнести шпангоуты, стрингеры и т.д. Задачей контроля готовой детали является определение значения радиуса дуги на каждом участке.

### Определение кривизны

Определение радиусов кривизны контура во всех расчетных точках можно решить, заменяя радиусы кривизны расчетного контура радиусами окружностей, проходящих через каждые три точки этого контура.

Математическая модель этой операции реализуется простыми зависимостями, получаемыми на основе решения системы уравнений окружности, проходящей через три точки (рис. 2):

$$\begin{cases} (X_c - x_{i-1})^2 + (Y_c - y_{i-1})^2 = R^2, \\ (X_c - x_i)^2 + (Y_c - y_i)^2 = R^2, \\ (X_c - x_{i+1})^2 + (Y_c - y_{i+1})^2 = R^2. \end{cases}$$

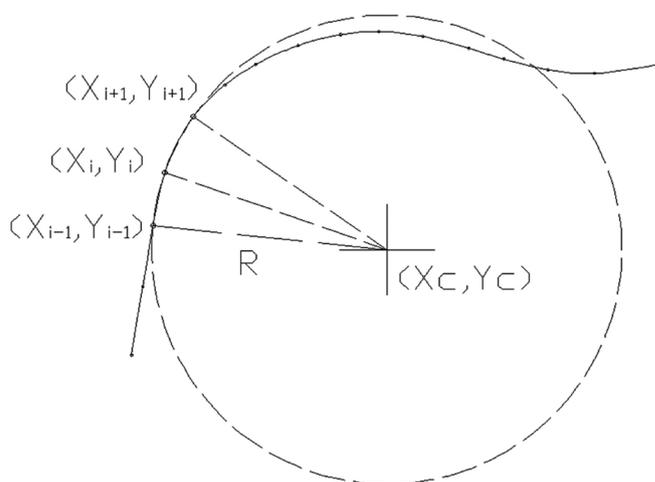


Рис. 2. Схема определения радиуса кривизны в точках рабочего контура

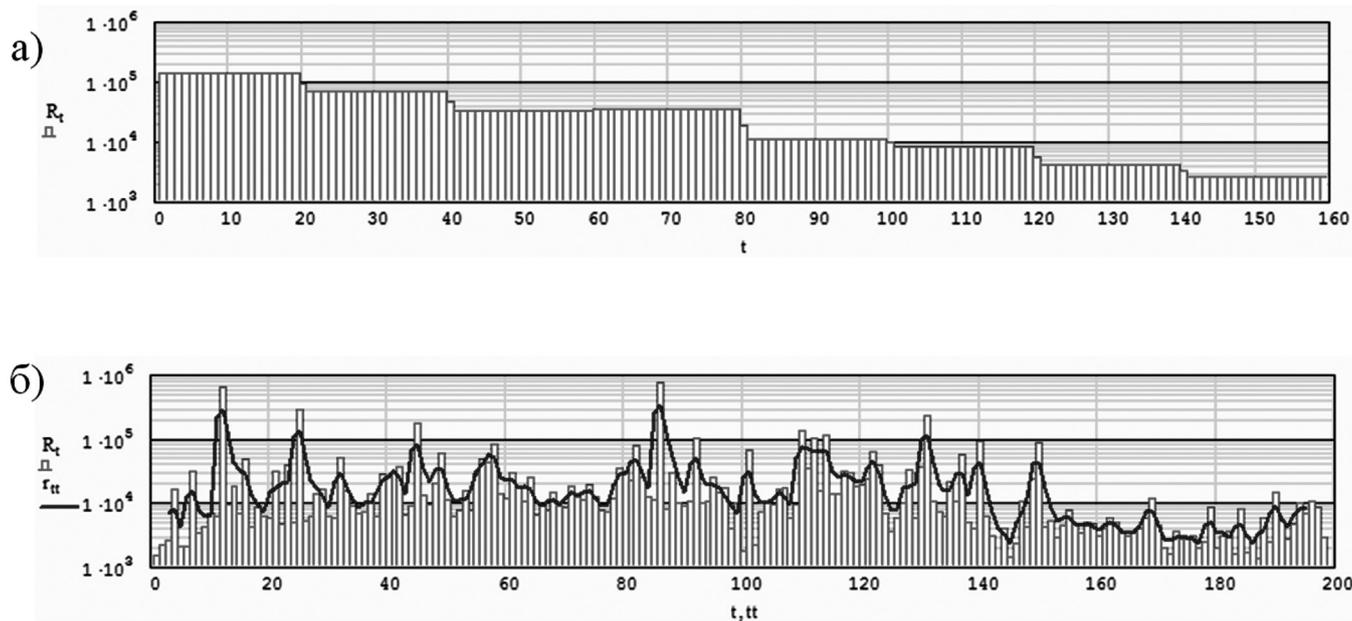


Рис. 3. Радиусы кривизны рассматриваемых контуров  
 а — функционально рассчитанная кривая  
 б — экспериментальная кривая с усреднением радиусов

$$\begin{cases} (Xc - x_i)^2 + (Yc - y_i)^2 = (Xc - x_{i-1})^2 + (Yc - y_{i-1})^2, \\ (Xc - x_i)^2 + (Yc - y_i)^2 = (Xc - x_{i+1})^2 + (Yc - y_{i+1})^2. \end{cases}$$

Для трех последовательных точек контура  $i-1, i, i+1$  эта система имеет единственное решение в виде:

$$Xc = \frac{(x_{i-1} - x_i)(y_i^2 - y_{i+1}^2 + x_i^2 - x_i^2) + (x_i - x_{i+1})(x_i^2 - x_{i-1}^2 + y_i^2 - y_{i-1}^2)}{2[(x_i - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i) - (x_{i-1} - x_i)(y_i - y_{i+1})]},$$

$$Yc = \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2 + y_i^2 - y_{i-1}^2 - 2Xc(y_{i-1} - y_i)}{2(x_{i-1} - x_i)},$$

$$R = \sqrt{(Xc + x_i)^2 + (Yc + y_i)^2},$$

где  $x_i, y_i$  — координаты точек кривой,  $R$  — расчетный радиус кривизны в точках.

Используя полученные формулы, рассчитаем кривизну в каждой точке теоретической кривой и кривой, образованной точками измерения. На рисунке 3 хорошо видно, что радиусы кривизны рассчитанного контура точно совпали с заданными значениями. По радиусам кривой, образованной точками измерения, невозможно точно определить, какую кривизну имеют дуги этого контура, откуда следует, что даже при незначительных погрешностях, находящихся в пределах допуска, в измерении контура детали, результаты становятся непригодны для обработки.

Практика показала, что усреднение кривизны с различными количествами показаний не приводит к сколько-нибудь адекватному результату. Поэтому наиболее очевидным решением в данной ситуации является аппроксимация данных экспериментальной

геометрии некоторой дугой, лежащей в пределах контрольных точек.

### Аппроксимация дугой окружности

Задача аппроксимации состоит в нахождении аналитического описания кривой, проходящей вблизи опорных точек. Базовыми элементами аппроксимирующих функций являются полиномы различных степеней, но в нашем случае, для оценки кривизн, наибольший интерес представляет аппроксимация дугой окружности.

Пусть имеется массив точек с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , где  $n$  — общее количество точек, лежащих вдоль дуги окружности некоторого радиуса с некоторой погрешностью, характеризующей их разброс. Необходимо определить радиус данной дуги. Для решения этой задачи воспользуемся методом наименьших квадратов. Минимизация суммы квадратов отклоне-

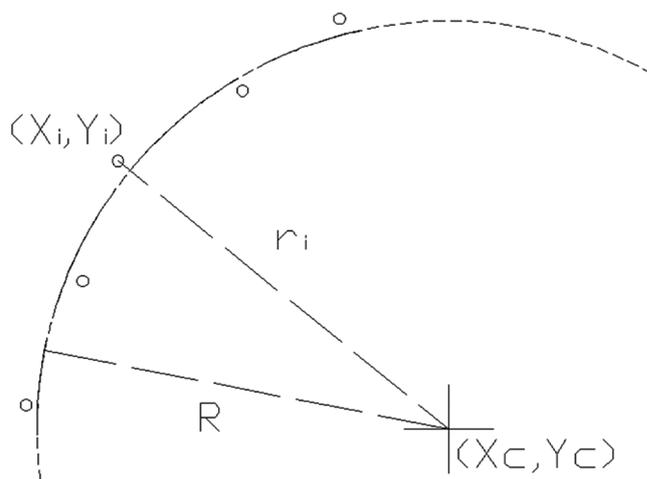


Рис. 4. Схема аппроксимации

ния экспериментальных координат от функции дуги окружности примет вид:

$$S = \sum_{i=1}^n (r_i^2 - R^2)^2 \rightarrow \min,$$

где  $r_i$  — расстояния координаты  $(x_i, y_i)$  до центра окружности  $(X_c, Y_c)$ ,  $R$  — радиус этой окружности (рис. 4).

$$r_i^2 = (x_i - X_c)^2 + (y_i - Y_c)^2,$$

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - 2x_i X_c - 2y_i Y_c + X_c^2 + Y_c^2 - R^2]^2. \quad (1)$$

Для упрощения выражения произвели замену,  $Q = X_c^2 + Y_c^2 - R^2$ , что позволило значительно упростить задачу:

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - 2x_i X_c - 2y_i Y_c + Q]^2,$$

Условием минимума полученной функции является равенство нулю частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial X_c} = \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i X_c - 2y_i Y_c + Q) \cdot (-4x_i)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial Y_c} = \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i X_c - 2y_i Y_c + Q) \cdot (-4y_i)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial Q} = \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i X_c - 2y_i Y_c + Q) \cdot 2] = 0. \end{cases}$$

В результате дифференцирования функции имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (4x_i^2 X_c + 4x_i y_i Y_c - 2x_i Q) = \sum_{i=1}^n (2x_i (x_i^2 + y_i^2)), \\ \sum_{i=1}^n (4x_i y_i X_c + 4y_i^2 Y_c - 2y_i Q) = \sum_{i=1}^n (2y_i (x_i^2 + y_i^2)), \\ \sum_{i=1}^n (2x_i X_c + 2y_i Y_c - Q) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 & 4 \sum_{i=1}^n x_i y_i & -2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 4 \sum_{i=1}^n x_i y_i & 4 \sum_{i=1}^n y_i^2 & -2 \sum_{i=1}^n y_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n y_i & -n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n (x_i^3 + x_i y_i^2) \\ 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i + y_i^3) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений, получаем искомые значения. Учитывая проведённую ранее замену, вычислим радиус этой окружности

$$R = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2 - Q}.$$

Уравнение траектории точки, формирующей дугу, имеет вид:

$$\begin{cases} x_i = X_c + R \cdot \cos(\alpha_i), \\ y_i = Y_c + R \cdot \sin(\alpha_i). \end{cases} \quad (2)$$

где  $\alpha_i = \alpha_s + \frac{i}{n} \cdot \alpha L$ ,

$\alpha_s = k \cdot \pi + \arctg\left(\frac{y_s - Y_c}{x_s - X_c}\right)$  угол начала дуги  $k$  — зависит от четверти окружности, в которой находится начальная точка дуги;

$\alpha L = \frac{L}{R}$  этот угол выражает отношение длины к радиусу дуги и в зависимости от направления расчета точек имеет положительное, либо отрицательное значение.

Полученная дуга достаточно качественно «сглаживает» эксперимент, и полученные координаты годятся для дальнейшего их использования в корректировке. Для кривой, имеющей несколько отрезков с условно постоянным радиусом, необходимо искать свою дугу для каждого участка кривой.

### Аппроксимация с известным началом дуги

Кривая, состоящая из нескольких дуг, должна быть непрерывной, т. е. окончание одной дуги должно быть началом следующей. Частным случаем аппроксимации, при котором требуется прохождение аппроксимирующей кривой через исходные опорные точки, является интерполяция. В нашу задачу добавилось условие, при котором дуга должна проходить через одну известную точку (рисунок 5).

Учитывая это условие, радиус окружности представим в следующем виде:

$$R^2 = (x_s - X_c)^2 + (y_s - Y_c)^2 = x_s^2 + y_s^2 - 2x_s X_c - 2y_s Y_c + X_c^2 + Y_c^2.$$

Поставив радиус в зависимость от начала дуги, выражение (1) сведётся к функции с двумя неизвестными:

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - x_s^2 - y_s^2 + 2(x_s - x_i)X_c + 2(y_s - y_i)Y_c]^2. \quad (3)$$

Тогда система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial X_c} = -4 \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - x_s^2 - y_s^2 + 2(x_s - x_i)X_c + 2(y_s - y_i)Y_c)(x_s - x_i)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial Y_c} = -4 \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - x_s^2 - y_s^2 + 2(x_s - x_i)X_c + 2(y_s - y_i)Y_c)(y_s - y_i)] = 0. \end{cases}$$

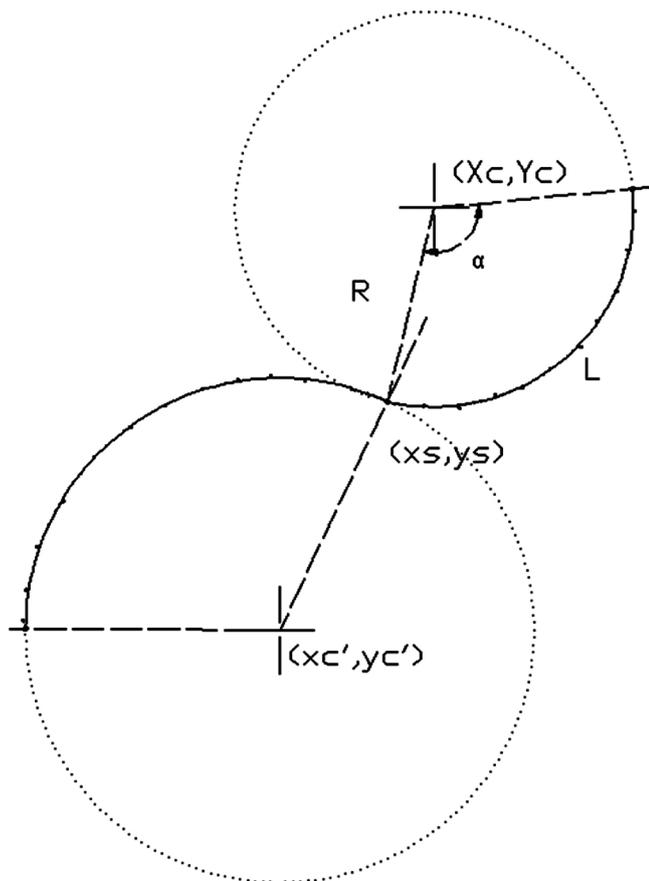


Рис. 5. Схема аппроксимации контура с учетом начала дуги

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [2(xs - x_i)Xc + 2(xs - x_i)(ys - y_i)Yc] = \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2)(x_i - xs)] \\ \sum_{i=1}^n [2(xs - x_i)(ys - y_i)Xc + 2(ys - y_i)^2 Yc] = \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2)(y_i - ys)] \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n (xs - x_i)^2 & 2 \sum_{i=1}^n (xs - x_i)(ys - y_i) \\ 2 \sum_{i=1}^n (xs - x_i)(ys - y_i) & 2 \sum_{i=1}^n (ys - y_i)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Xc \\ Yc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2)(x_i - xs)] \\ \sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2)(y_i - ys)] \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений, получаем координаты центра окружности дуги. Используя полученный результат и начало дуги, определяем радиус искомой окружности

$$R = \sqrt{(xs - Xc)^2 + (ys - Yc)^2}$$

Расчет траектории точек дуги производится по формулам (2).

На основе полученной математической модели аппроксимации контура был разработан алгоритм расчета кривизны контура набором дуг с исходными данными начала первой дуги и списка длин дуг (рисунок 6). В дан-

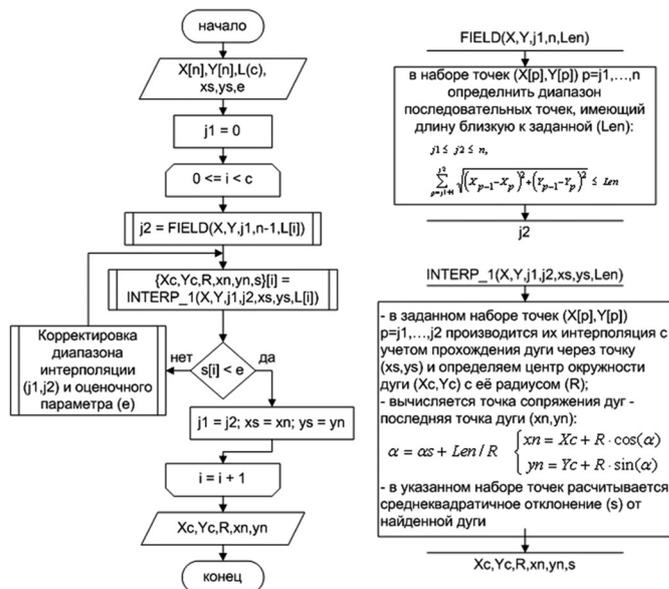


Рис. 6. Алгоритм расчета радиусов кривизны контура набором дуг с учетом точек сопряжения

ном алгоритме указывается первая точка контура (xs, ys), через которую пройдет первая искомая дуга. Кроме того, при аппроксимации исходного диапазона, определяемого по длине дуги (FIELD), среднеквадратичное отклонение может не удовлетворять заданной погрешности (e—оценочный параметр также может корректироваться), поэтому производится корректировка диапазона аппроксимации (j1, j2) путём расширения его до тех пор, пока отклонение не станет приемлемым. В зависимости от задачи, которую ставят перед этим модулем, методы корректировки могут сильно различаться и в значительной степени влиять на конечный результат.

Используя разработанный алгоритм, были проверены расчеты теоретического и экспериментального контура. На рисунке 7 показаны результаты отклонения исходных контуров от геометрии дуг, найденных интерполирующей функцией. Полученные результаты имеют отклонения значительно ниже существующих допусков на длинномерных деталях, что положительно характеризует разработанную математическую модель и алгоритм аппроксимации.

Однако, несмотря на достаточно хороший результат, такая аппроксимация не обеспечивает гладкости перехода геометрии между дугами кривой. В результатах отклонения видно, что точка перехода из одной дуги в другую имеет разную величину отклонения, что объясняется математической моделью интерполирующей функции. На рисунке 5 видно, что радиус одной дуги не лежит на одной прямой с радиусом другой дуги, это говорит о том, что нормали в точке перехода от одной дуги к другой не совпадают, что и приводит к переломам на кривой. Разница между этими отклонениями незначительная и значит перелом кривой почти незаметен.

### Аппроксимация с известным началом дуги и известным центром

Для того чтобы минимизировать возможные переломы на кривой, добавим в формулу аппроксимации

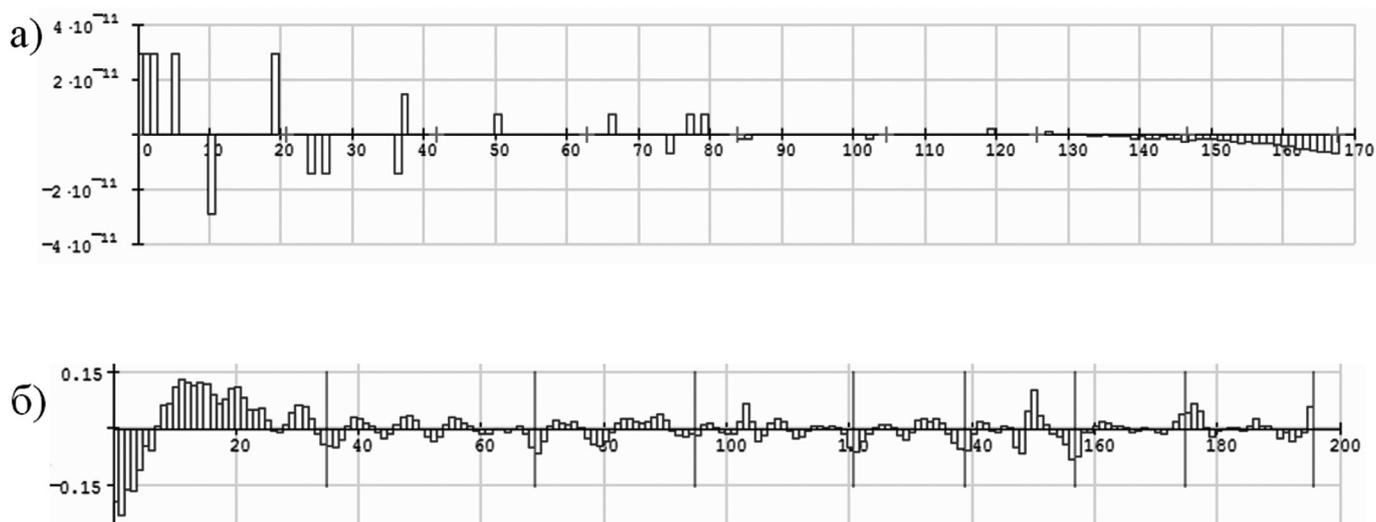


Рис. 7. Отклонения точек контура от геометрии дуг, полученных аппроксимацией:  
 а — отклонения функциональной зависимой геометрии;  
 б — отклонения экспериментальных данных

(3) ещё одно дополнительное условие:

$Yc = a(Xc - xc') + yc'$ , где  $a = \frac{ys - yc'}{xs - xc'}$  — угловой коэффициент прямой.

Центр окружности дуги должен располагаться на одной прямой, проходящей через центр окружно-

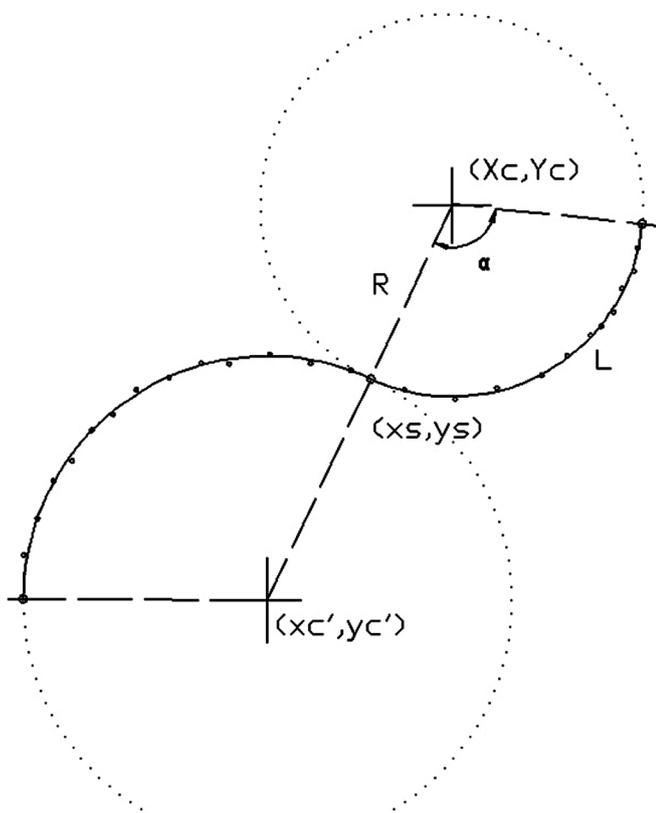


Рис. 8. Схема аппроксимации контура с учетом начала дуги и зависимым центром

сти предыдущей дуги и точку перехода между этими дугами (рисунком 8). Тогда получим уравнение:

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + 2(xs - x_i)Xc + 2(ys - y_i)(a \cdot Xc - a \cdot xc' + yc')]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + 2(xs - x_i)Xc + 2a(ys - y_i)Xc + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc')]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n [x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc') + 2(xs - x_i + a(ys - y_i))Xc]^2 \quad (4)$$

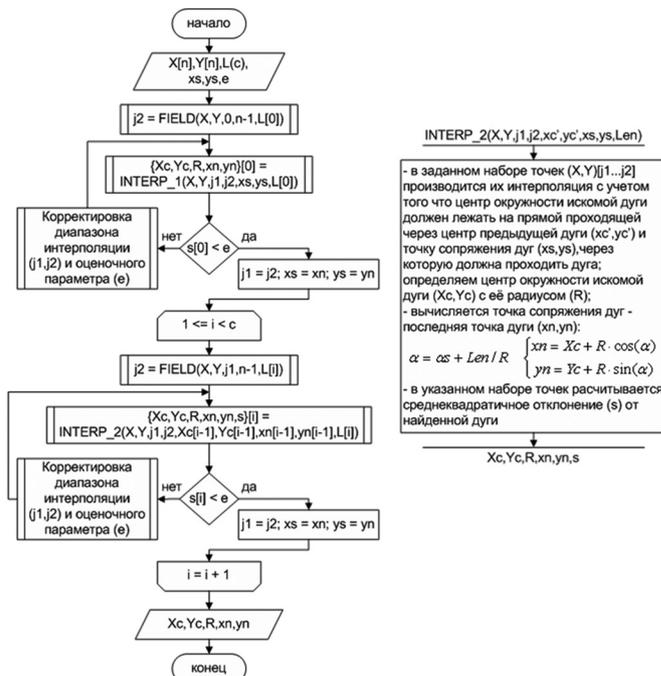


Рис. 9. Алгоритм расчета радиусов кривизны контура набором дуг с учетом точек сопряжения и зависимых центров

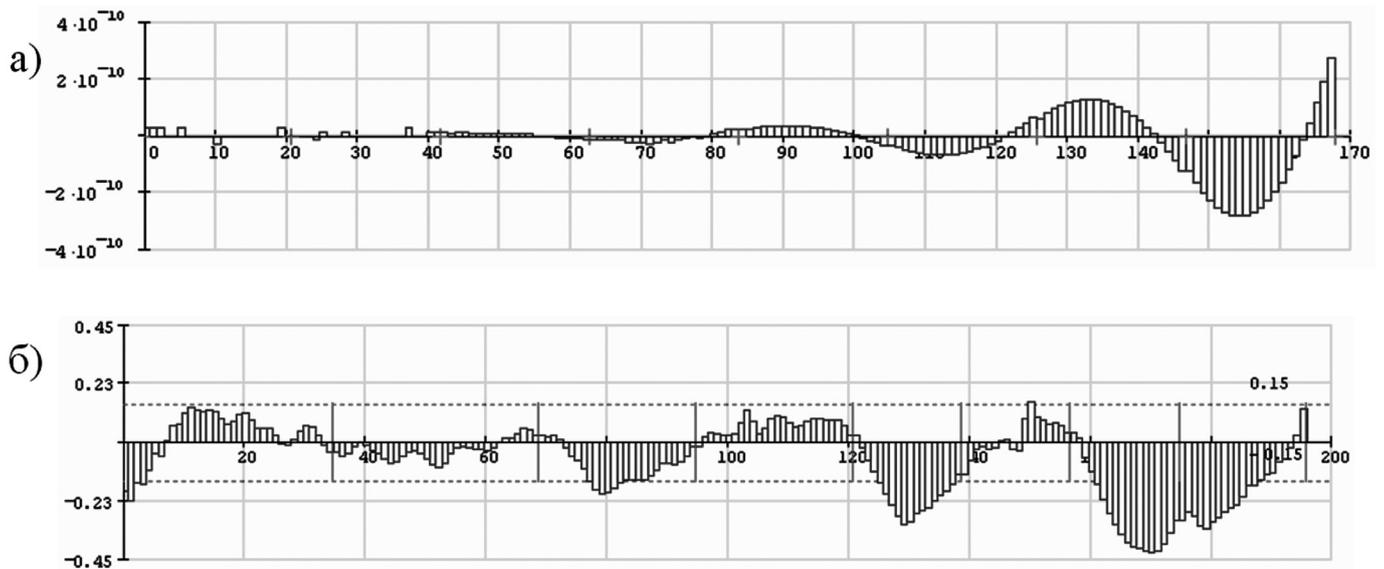


Рис. 10. Отклонения точек контура от геометрии дуг, полученных интерполяцией:  
 а — отклонения функциональной зависимой геометрии;  
 б — отклонения экспериментальных данных

В такой постановке задачи решается одно дифференциальное уравнение.

$$\frac{\partial S}{\partial Xc} = 4 \sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{l} x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + \\ + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc') + \\ + 2(xs - x_i + a(ys - y_i))Xc \end{array} \right] (xs - x_i + a(ys - y_i)) = 0$$

$$4 \sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{l} x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + \\ + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc') \end{array} \right] (xs - x_i + a(ys - y_i)) + 2(xs - x_i + a(ys - y_i))^2 Xc = 0$$

$$8Xc \sum_{i=1}^n (xs - x_i + a(ys - y_i))^2 = -4 \sum_{i=1}^n \left[ \begin{array}{l} x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + \\ + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc') \end{array} \right] (xs - x_i + a(ys - y_i))$$

$$Xc = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i^2 + y_i^2 - xs^2 - ys^2 + 2(ys - y_i)(yc' - a \cdot xc'))(xs - x_i + a(ys - y_i))]}{-2 \sum_{i=1}^n (xs - x_i + a(ys - y_i))^2}$$

$$Yc = a(Xc - xc') + yc'$$

$$R = \sqrt{Xc^2 + Yc^2 - Q}$$

Полученные выражения позволяют обеспечить гладкость аппроксимации.

На рисунке 9 показан алгоритм, в котором, в отличие от предыдущего, применяются две аппроксимационные функции, первая дуга рассчитывается по схеме со свободным центром окружности, а все последующие дуги рассчитываются по схеме зависимых центров.

Полученной аппроксимационной схемой рассчитали теоретический и экспериментальный контуры. Результаты показали, что уменьшение числа свобод при аппроксимации приводит к накоплению ошибок, которые в некоторых случаях могут давать значительные отклонения (рисунок 10).

Разработанные методы аппроксимации дугами экспериментальных данных являются хорошим инструментом при анализе геометрии длинномерных деталей типа стрингеров летательного аппарата. Практика показала, что разработанные методика и алгоритмы позволяют с необходимой точностью оценивать геометрию контуров деталей, и позволяет оперативно в процессе серийного производства корректировать установку оборудования по результатам гибки первой детали от партии.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Феоктистов, С.И. Автоматизация проектирования технологических процессов и оснастки заготовительно-штамповочного производства авиационной промышленности./С.И. Феоктистов. — Владивосток: Дальнаука, 2001. 183 с.
2. Выгодский М.Я., Справочник по высшей математике/М.Я. Выгодский. — М.: Наука, 1965-872 с.